

KARAKTERISTIK S-MODUL PERKALIAN

Sahlan Sidjara¹, Whannie Youngger Oeitama², Maya Sari Wahyuni³

Universitas Negeri Makassar^{1,2,3}

Email: sahlansidjara@unm.ac.id^{1*}, whannieoeitama21@gmail.com²,
maya.sari.wahyuni@unm.ac.id³

Abstrak. *S*-modul perkalian merupakan perumuman dari modul perkalian. Sifat-sifat atau karakteristik dari *S*-modul perkalian sebelumnya telah diperkenalkan dan dibahas oleh Anderson et al. (2020) dan Baupradist & Hukaew (2024) dimana modul yang dikaji adalah modul uniter kanan atas suatu ring R . Langkah-langkah pembuktian dalam penelitian tersebut belum dibahas secara lengkap sehingga penelitian ini bertujuan untuk melengkapi pembuktian karakteristik *S*-modul perkalian dimana modul yang dikaji adalah modul uniter kiri atas ring R . Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau murni dengan metode studi literatur. Tahapan penelitian yang dilakukan yaitu: mencari literatur utama dan pendukung; mempelajari definisi, teorema, dan contoh yang berkaitan dengan grup, ring, ideal, modul, modul perkalian, dan *S*-modul perkalian; membuktikan teorema-teorema terkait karakteristik *S*-modul perkalian; dan menarik kesimpulan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa diperoleh pembuktian yang lebih lengkap terhadap sepuluh teorema mengenai karakteristik *S*-modul perkalian. Selain itu, karakteristik *S*-modul perkalian terbukti berlaku untuk modul uniter kiri atas ring R . Hasil penelitian diharapkan dapat menjadi rujukan dan tambahan bahan pustaka di bidang teori modul, khususnya yang berkaitan dengan karakteristik *S*-modul perkalian. Penelitian lebih lanjut dapat difokuskan pada karakteristik *S*-modul perkalian dari modul kuosien dan keterkaitannya dengan homomorfisma modul.

Kata Kunci: Karakteristik, Modul, Modul Perkalian, *S*-Modul Perkalian.

Abstract. *S*-multiplication modules are a generalization of multiplication modules. The properties or characteristics of *S*-multiplication modules were previously introduced and discussed by Anderson et al. (2020) and Baupradist & Hukaew (2024), where the modules studied were right unital modules over a ring R . The proofs in those studies were not discussed in full detail; therefore, this study aims to provide complete proofs of the characteristics of *S*-multiplication modules, where the modules studied are left unital modules over a ring R . This study is basic or pure research employing a literature review method. The research stages consist of: collecting primary and supporting literature; studying definitions, theorems, and examples related to groups, rings, ideals, modules, multiplication modules, and *S*-multiplication modules; proving theorems related to the characteristics of *S*-multiplication modules; and drawing conclusions. The results show that more comprehensive proofs were obtained for ten theorems concerning the characteristics of *S*-multiplication modules. Furthermore, it was proven that the characteristics of *S*-multiplication modules hold for left unital modules over a ring R . The results of this study are expected to serve as a reference and additional source of literature in the field of module theory, particularly in relation to the characteristics of *S*-multiplication modules. Future research may focus on exploring the characteristics of *S*-multiplication modules of quotient modules and their relation to module homomorphisms.

Keywords: Characteristics, Modules, Multiplication Modules, *S*-Multiplication Modules.

A. Pendahuluan

Aljabar modern merupakan cabang ilmu matematika yang fokus pembahasannya pada struktur aljabar yaitu suatu himpunan tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner (Khattar & Agrawal, 2023a). Beberapa contoh struktur aljabar adalah grup, ring, lapangan, ruang vektor, dan modul. Konsep-konsep dalam struktur aljabar banyak diterapkan di bidang ilmu lain, seperti kriptografi dan teori pengodean (*coding theory*) (Ou-azzou et al., 2024).

Grup merupakan struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma yaitu tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas di dalam grup tersebut, dan setiap elemen di dalam grup mempunyai invers (DeBonis, 2024). Ring adalah pengembangan dari grup dimana terdapat dua operasi biner yaitu penjumlahan dan



perkalian yang memenuhi aksioma tertentu. Misalkan R suatu himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner maka aksioma yang harus dipenuhi sehingga R disebut ring adalah: (1) R terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif, (2) R terhadap operasi perkalian tertutup dan asosiatif, dan (3) memenuhi sifat distributif (Khattar & Agrawal, 2023b).

Lebih lanjut, jika R ring komutatif dengan unsur kesatuan dan setiap elemen bukan nol di R memiliki invers terhadap perkalian maka R disebut lapangan (Chang, 2024). Konsep lapangan penting dalam pembahasan terkait modul yang berkaitan erat dengan ruang vektor. Struktur pada ruang vektor melibatkan aksioma tentang perkalian skalar oleh elemen dari suatu lapangan. Sementara modul merupakan perumuman dari ruang vektor dimana skalar berasal dari suatu ring (Titahena et al., 2018). Dengan demikian, struktur lapangan pada ruang vektor diperumum menjadi ring.

Ada dua jenis modul yang dikenal dalam teori modul yaitu modul kiri dan modul kanan. Suatu modul kiri atas ring R adalah himpunan tidak kosong M yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar dari sebelah kiri oleh elemen di R , yaitu $\alpha \cdot a \in M$ untuk setiap $\alpha \in R, a \in M$, yang memenuhi aksioma tertentu. Sementara suatu modul kanan atas ring R adalah himpunan tidak kosong N yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar dari sebelah kanan oleh elemen di R , yaitu $a \cdot \alpha \in N$ untuk setiap $\alpha \in R, a \in N$, yang memenuhi aksioma tertentu. Selanjutnya, P disebut modul atas ring R jika P merupakan modul kiri dan modul kanan. Jika R ring komutatif maka P merupakan modul kiri sekaligus modul kanan atas R (Loehr, 2024).

Salah satu jenis modul khusus adalah modul perkalian (*multiplication module*) yang diperkenalkan pertama kali oleh Barnard pada tahun 1981 (Barnard, 1981). Misalkan N modul kanan atas ring R . N disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul L dari N terdapat suatu ideal I di R sedemikian sehingga $L = NI$. Hal ini berarti setiap submodul L berupa perkalian antara modul N dengan ideal I di R . Demikian halnya pada M modul kiri atas ring R . M disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul L dari M terdapat suatu ideal I di R sedemikian sehingga $L = IM$ (Anderson et al., 2020).

Penelitian terkait modul perkalian telah dilakukan oleh Alsuraiheed (2019) yang membahas mengenai karakteristik modul perkalian atas ring komutatif dan tidak komutatif. Selanjutnya pada tahun 2020, Anderson et al. dalam penelitiannya yang berjudul “*On S-Multiplication Modules*” memperkenalkan perumuman dari modul perkalian yang disebut S -modul perkalian, dengan menggunakan *multiplicatively closed subset* S dari suatu ring R . Suatu subhimpunan tak kosong S dari ring R dikatakan *multiplicatively closed subset* (atau disingkat *m.c.s.*) dari R jika S memuat identitas perkalian dan tertutup terhadap perkalian (Baupradist & Hukaew, 2024).

Penelitian tentang S -modul perkalian juga pernah dilakukan oleh Baupradist & Hukaew (2024) yang membahas mengenai sifat-sifat S -modul perkalian dengan asumsi bahwa semua modul merupakan modul uniter kanan atas suatu ring R . Namun, pembuktian dalam penelitian tersebut belum dibahas secara lengkap. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk melengkapi pembuktian sifat-sifat atau karakteristik S -modul perkalian yang telah dipaparkan sebelumnya oleh Anderson et al. (2020) dan Baupradist & Hukaew (2024). Dalam penelitian ini, modul yang dikaji adalah modul uniter kiri atas ring R . Selanjutnya, hasil penelitian diharapkan dapat menjadi rujukan dan tambahan bahan pustaka di bidang teori modul, khususnya yang berkaitan dengan karakteristik S -modul perkalian.

B. Kajian Teori

Dalam teori modul dikenal modul khusus yaitu modul perkalian, seperti yang dijelaskan pada Definisi 1. Selanjutnya, perumuman dari modul perkalian disebut dengan S -modul



perkalian. Penulisan M modul kiri atas ring R dapat disederhanakan menjadi M R -modul. Suatu submodul W dari M R -modul dinotasikan dengan $W \leq_R M$.

Definisi 1 Modul perkalian (Baupradist & Hukaew, 2024)

Misalkan R ring komutatif dengan unsur kesatuan. Suatu M R -modul disebut M R -modul perkalian jika untuk setiap L submodul dari M terdapat suatu I ideal di R sedemikian sehingga $L = IM$.

Definisi 2 multiplicatively closed subset (Baupradist & Hukaew, 2024)

Subhimpunan tak kosong S dari ring R dikatakan *multiplicatively closed subset* (atau disingkat *m.c.s.*) dari R jika S memuat identitas perkalian dan tertutup terhadap perkalian.

Definisi 3 S-modul perkalian (Anderson et al., 2020)

Misalkan M R -modul dan S merupakan *m.c.s.* dari ring R . M R -modul disebut suatu S -modul perkalian jika untuk setiap L submodul dari M , terdapat $s \in S$ dan I ideal dari R sehingga $sL \subseteq IM \subseteq L$.

Contoh 1

Diberikan $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yang merupakan modul kiri atas $\mathbb{Z}$. Misalkan $S = \{2^n | n \in \mathbb{N}_0\}$, dimana $\mathbb{N}_0$ adalah himpunan semua bilangan bulat non-negatif, maka:

- i) M adalah S -modul perkalian.
- ii) M bukan modul perkalian.

Bukti:

$$M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}_2\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

- i) Misalkan $L \leq_{\mathbb{Z}} M$. Pilih $2 \in S$. Karena $2\mathbb{Z}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}$ dan $0 = 2L = (2\mathbb{Z})M \subseteq L$ maka M adalah S -modul perkalian.
- ii) Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_2 \times 0 = \{(p, 0) | p \in \mathbb{Z}_2\} = \{(0,0), (1,0)\}$ merupakan submodul M , dan $\mathbb{Z}_2 \times 0$ tidak dapat dituliskan dalam bentuk IM untuk semua ideal I dari $\mathbb{Z}$. Andaikan $\mathbb{Z}_2 \times 0 = IM$. Karena I ideal dari $\mathbb{Z}$ maka I dapat dituliskan dalam bentuk $n\mathbb{Z}$, yaitu $I = n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}_0$.
 - Kasus 1: n adalah bilangan genap. Misalkan $(m_1, m_2) \in M$ dan $r \in n\mathbb{Z} = I$. Karena n adalah bilangan genap maka $r(m_1, m_2) = (rm_1, rm_2) = (0,0)$. Jadi, $IM = 0$.
 - Kasus 2: n adalah bilangan ganjil. Misalkan $(m_1, m_2) \in M$. Karena n adalah bilangan ganjil maka $(m_1, m_2) = (nm_1, nm_2) = n(m_1, m_2) \in IM$. Akibatnya, $M = IM$.
 Dari kasus 1 dan 2, ini bertentangan dengan pengandaian awal bahwa $\mathbb{Z}_2 \times 0 = IM$. Jadi, M bukan modul perkalian. ■

C. Metodologi Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau murni. Adapun metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur yaitu dengan mengumpulkan dan mempelajari berbagai literatur seperti buku, jurnal, dan tesis yang berkaitan dengan karakteristik S -modul perkalian. Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang menjadi acuan dalam penelitian ini, yaitu *On S-Multiplication Modules* (Anderson et al., 2020) dan *More Characterizations of S-Multiplication Modules* (Baupradist & Hukaew, 2024).
2. Mencari literatur tambahan sebagai pendukung dari literatur utama dalam pembahasan masalah.
3. Mempelajari dan memahami definisi, teorema, dan contoh yang berkaitan dengan grup, ring, ideal, modul sebagai perumuman dari ruang vektor, modul perkalian, dan S -modul perkalian.
4. Menunjukkan dan membuktikan teorema-teorema terkait karakteristik S -modul perkalian.
5. Menarik kesimpulan berdasarkan teorema-teorema yang telah dibuktikan.



D. Hasil Penelitian

Agar pembahasan pada penelitian ini lebih terarah maka ruang lingkupnya dibatasi pada: (1) semua ring R dianggap sebagai ring dengan unsur kesatuan, (2) semua ideal merupakan ideal kiri, dan (3) semua modul diasumsikan sebagai modul bukan nol dan merupakan modul uniter kiri atas ring R . Berikut ini akan dibahas beberapa definisi, teorema, dan lemma yang berkaitan dengan sifat-sifat atau karakteristik dari S -modul perkalian.

Misalkan M R -modul. *Annihilator* dari M , dinotasikan dengan $\text{Ann}_R(M)$, didefinisikan sebagai $\text{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in M\}$ (Lawrence & Zorzitto, 2021).

Teorema 1 (Anderson et al., 2020)

Jika M R -modul, $S \subseteq R$ *m.c.s.* dari ring R , dan $S \cap \text{Ann}_R(M) \neq \emptyset$ maka M R -modul merupakan S -modul perkalian.

Bukti:

Misal M R -modul, $S \subseteq R$ *m.c.s.* dari ring R , dan $S \cap \text{Ann}_R(M) \neq \emptyset$. Akan dibuktikan bahwa M R -modul merupakan S -modul perkalian. Ambil L submodul dari M sebarang. Akan dicari $p \in S$ dan I ideal R sehingga $pL \subseteq IM \subseteq L$. Perhatikan bahwa, $S \cap \text{Ann}_R(M) \neq \emptyset$, akibatnya terdapat $p \in S$ dan $p \in \text{Ann}_R(M)$. Diperoleh $pm = 0, \forall m \in M$ sehingga $pM = 0$. Pilih $p \in S$, dan $I = 0$ ideal di R sehingga $pL \subseteq pM = 0 = IM \subseteq L$. Jadi, M R -modul adalah S -modul perkalian. ■

Contoh 2

1. Diketahui $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -modul, $S = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ *m.c.s.* dari ring $\mathbb{R}$ karena $\mathbb{Z}$ memuat identitas perkalian yaitu 1 dan tertutup terhadap perkalian. Karena $\text{Ann}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 0$ sehingga $\mathbb{Z} \cap \text{Ann}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ maka berdasarkan Teorema 1, $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -modul merupakan S -modul perkalian.
2. Diketahui $\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modul, $S = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Z}$ *m.c.s.* dari ring $\mathbb{Z}$ karena S memuat identitas perkalian yaitu 1 dan tertutup terhadap perkalian. Karena $\text{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4) = \{r \in \mathbb{Z} \mid rm = 0, \forall m \in \mathbb{Z}_4\} = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots\} = 4\mathbb{Z}$ sehingga $S \cap \text{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4) \neq \emptyset$ maka berdasarkan Teorema 1, $\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modul merupakan S -modul perkalian.

Berdasarkan Teorema 1 dan Contoh 2, jika S *m.c.s.* dari ring R memuat elemen 0 maka M R -modul merupakan S -modul perkalian dan disebut S -modul perkalian trivial. Oleh karena itu, untuk menghindari kasus tersebut, selanjutnya diasumsikan bahwa S tidak memuat elemen 0 atau dengan kata lain $0 \notin S$.

Selanjutnya, dari Definisi 1 dan Definisi 3 dapat diketahui bahwa setiap modul perkalian merupakan S -modul perkalian, tetapi tidak semua S -modul perkalian merupakan modul perkalian. Hal ini ditunjukkan pada Contoh 1, yaitu ketika $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sebagai $\mathbb{Z}$ -modul dengan $S = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ maka M merupakan S -modul perkalian, tetapi bukan modul perkalian. Meskipun demikian, Teorema 3 memberikan suatu kondisi khusus yang menjamin bahwa setiap S -modul perkalian juga merupakan modul perkalian.

Teorema 2 (Anderson et al., 2020)

Misalkan $S \subseteq R$ *m.c.s.* dari ring R . Jika M R -modul perkalian maka M R -modul adalah S -modul perkalian.

Bukti:

Misal $S \subseteq R$ *m.c.s.* dari ring R dan M R -modul perkalian. Akan dibuktikan M R -modul adalah S -modul perkalian. Ambil L submodul dari M sebarang. Karena M R -modul perkalian, terdapat I ideal R sehingga $L = IM$. Akibatnya, $L \subseteq IM$ dan $IM \subseteq L$. Pilih $s \in S \subseteq R$. Akan dibuktikan $sL \subseteq L$. Ambil $p \in sL$ sebarang, tulis $p = sl$ untuk suatu $l \in L$. Perhatikan bahwa, $p = sl \in L$ karena L submodul dari M . Akibatnya, $sL \subseteq L$ sehingga diperoleh $sL \subseteq L \subseteq IM \subseteq L$. Jadi, M R -modul adalah S -modul perkalian. ■

Teorema 3 (Anderson et al., 2020)

Misalkan $S \subseteq R$ *m.c.s.* dari ring R . Jika M R -modul adalah S -modul perkalian dan $S \subseteq U(R)$, dimana $U(R)$ adalah himpunan semua unit di R , maka M R -modul perkalian.

Bukti:



Misal $S \subseteq R$ m.c.s. dari ring R , M R -modul adalah S -modul perkalian, dan $S \subseteq U(R)$. Akan dibuktikan bahwa M R -modul perkalian. Ambil L submodul dari M sebarang. Karena M R -modul adalah S -modul perkalian maka terdapat $s \in S$ dan I ideal R sehingga $sL \subseteq IM \subseteq L$. Perhatikan bahwa, $s \in S \subseteq U(R)$ sehingga $s \in U(R)$. Akibatnya, terdapat $s^{-1} \in R$ sehingga $ss^{-1} = 1_R$. Selanjutnya, ambil $l \in L$ sebarang, diperoleh $l = 1_R l = (ss^{-1})l = s(s^{-1}l) \in sL$ karena L submodul. Akibatnya, $L \subseteq sL$. Dengan demikian, $L \subseteq sL \subseteq IM \subseteq L$ sehingga $L = IM$. Jadi, M R -modul perkalian. ■

Berikut ini diberikan Definisi 4 beserta Lemma 1 dan Lemma 2 yang akan digunakan dalam pembuktian teorema selanjutnya.

Definisi 4 (Titahena et al., 2018)

Misal L submodul dari M R -modul, $(L : M) = \{r \in R | rM \subseteq L\}$.

Lemma 1 (Titahena et al., 2018)

Jika M R -modul dan L submodul dari M maka $(L : M)$ adalah ideal di ring R .

Bukti:

Misal M R -modul dan L submodul dari M . Akan dibuktikan bahwa $(L : M)$ ideal di ring R .

- 1) $(L : M) \neq \emptyset$
 $0 \in (L : M)$ karena $0 \in R$ dimana $0M = 0 \subseteq L$.
 $\therefore (L : M) \neq \emptyset$
- 2) $(L : M) \subseteq R$ [jelas dari definisi $(L : M)$]
- 3) Ambil $a, b \in (L : M)$ sebarang, artinya $a \in R$ dimana $aM \subseteq L$, dan $b \in R$ dimana $bM \subseteq L$. Akan dibuktikan $a - b \in (L : M)$. Perhatikan bahwa, $a - b \in R$ karena $a, b \in R$ dan R ring. Selanjutnya, ambil $p \in (a - b)M$ sebarang, tulis $p = (a - b)m$ untuk suatu $m \in M$. Diperoleh, $p = (a - b)m = am - bm \in L$ karena $am, bm \in L$, dan L submodul dari M . Akibatnya, $(a - b)M \subseteq L$. Jadi, $a - b \in (L : M)$.
- 4) Ambil $r \in R$, $a \in (L : M)$ sebarang. Akan dibuktikan $ra \in (L : M)$. Karena $a \in (L : M)$ artinya $a \in R$ dimana $aM \subseteq L$. Perhatikan bahwa, $ra \in R$ karena $a, r \in R$ dan R ring. Selanjutnya, ambil $q \in (ra)M$ sebarang, tulis $q = (ra)m$ untuk suatu $m \in M$. Diperoleh, $q = (ra)m = r(am) \in L$ karena $am \in L$ dan L submodul dari M . Akibatnya, $(ra)M \subseteq L$. Jadi, $ra \in (L : M)$.

Berdasarkan (1), (2), (3), dan (4), terbukti bahwa $(L : M)$ ideal di ring R . ■

Lemma 2 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Jika M R -modul dan L submodul M maka $(L : M)M$ submodul dari M .

Bukti:

Misal M R -modul dan L submodul M . Akan dibuktikan bahwa $(L : M)M$ submodul dari M .

- 1) $(L : M)M \neq \emptyset$
 $0 = 0M \in (L : M)M$
 $\therefore (L : M)M \neq \emptyset$
- 2) $(L : M)M \subseteq M$
 Ambil $x \in (L : M)M$ sebarang, tulis $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ dengan $a_i \in (L : M)$ dan $b_i \in M$. Perhatikan bahwa, $a_i \in (L : M)$ artinya $a_i \in R$ dimana $a_i M \subseteq L \subseteq M$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Akibatnya, $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in M$. Jadi, $(L : M)M \subseteq M$.
- 3) Ambil $\alpha \in R$, $x, y \in (L : M)M$ sebarang, tulis $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ dan $y = \sum_{j=1}^m p_j q_j$ dengan $a_i, p_j \in (L : M)$, dan $b_i, q_j \in M$. Perhatikan bahwa,
 $x + y = \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{j=1}^m p_j q_j \in (L : M)M$,
 $\alpha x = \alpha \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n \alpha(a_i b_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i) b_i \in (L : M)M$ karena $\alpha, a_i \in R$, dan R ring sehingga $\alpha a_i \in R$ dengan $(\alpha a_i)M = \alpha(a_i M) \subseteq \alpha L \subseteq L$. Akibatnya, $\alpha a_i \in (L : M)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Berdasarkan (1), (2), dan (3) terbukti bahwa $(L : M)M$ submodul dari M . ■

Teorema 4 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Jika M R -modul maka pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) M R -modul adalah S -modul perkalian.
- (ii) Untuk setiap L submodul dari M , terdapat $s \in S$ sedemikian sehingga $sL \subseteq (L : M)M \subseteq L$.
- (iii) Untuk setiap L dan W submodul dari M sedemikian sehingga $(L : M) = (W : M)$, terdapat $s, t \in S$ sehingga $sL \subseteq W$ dan $tW \subseteq L$.

Bukti:

Misal M R -modul.

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Akan dibuktikan (i) $\Rightarrow$ (ii):

Misal M R -modul adalah S -modul perkalian. Karena M R -modul adalah S -modul perkalian maka untuk setiap L submodul dari M , terdapat $s \in S$ dan I ideal R sedemikian sehingga $sL \subseteq IM \subseteq L$. Berdasarkan Lemma 1, $(L : M)$ ideal R . Akibatnya, $sL \subseteq (L : M)M \subseteq L$.

Akan dibuktikan (ii) $\Rightarrow$ (i):

Misal untuk setiap L submodul M , terdapat $s \in S$ sedemikian sehingga $sL \subseteq (L : M)M \subseteq L$. Karena $(L : M)$ ideal R , pilih $I = (L : M)$ sehingga $sL \subseteq (L : M)M = IM \subseteq L$. Jadi M R -modul adalah S -modul perkalian.

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Akan dibuktikan (ii) $\Rightarrow$ (iii):

Misalkan (ii) berlaku. Ambil L dan W submodul dari M sebarang, sedemikian sehingga $(L : M) = (W : M)$. Karena L dan W submodul M maka berdasarkan (ii), terdapat $s, t \in S$ sehingga $sL \subseteq (L : M)M \subseteq L$ dan $tW \subseteq (W : M)M \subseteq W$. Akibatnya, $sL \subseteq (L : M)M = (W : M)M \subseteq W$ sehingga $sL \subseteq W$. Demikian halnya, $tW \subseteq (W : M)M = (L : M)M \subseteq L$ sehingga $tW \subseteq L$.

Akan dibuktikan (iii) $\Rightarrow$ (ii):

Misalkan (iii) berlaku. Ambil L submodul dari M sebarang. Misalkan $W = (L : M)M$ submodul dari M . Klaim bahwa $(L : M) = (W : M)$. Bukti dari klaim adalah sebagai berikut:

- 1) Akan dibuktikan bahwa $(L : M) \subseteq (W : M)$. Ambil $p \in (L : M)$ sebarang, artinya $p \in R$ dimana $pM \subseteq L$. Selanjutnya akan dibuktikan $pM \subseteq W$. Ambil $\alpha \in pM$ sebarang, tulis $\alpha = pm$ untuk suatu $m \in M$. Perhatikan bahwa, $\alpha = pm \in (L : M)M = W$ sehingga $\alpha \in W$. Akibatnya, $pM \subseteq W$. Karena $p \in R$, $pM \subseteq W$ maka $p \in (W : M)$. Jadi terbukti bahwa $(L : M) \subseteq (W : M)$.
- 2) Akan dibuktikan bahwa $(W : M) \subseteq (L : M)$. Ambil $q \in (W : M)$ sebarang, artinya $q \in R$ dimana $qM \subseteq W$. Selanjutnya akan dibuktikan $(L : M)M = W \subseteq L$. Ambil $a \in (L : M)M$ sebarang, tulis $a = bm$ untuk suatu $b \in (L : M)$, $m \in M$. Karena $b \in (L : M)$ berarti $b \in R$ dimana $bM \subseteq L$, sehingga diperoleh $a = bm \in L$. Jadi, $(L : M)M = W \subseteq L$. Karena $q \in R$, $qM \subseteq W \subseteq L$ maka $q \in (L : M)$. Jadi terbukti bahwa $(W : M) \subseteq (L : M)$.

Dari (1) dan (2), terbukti bahwa $(L : M) = (W : M)$ maka berdasarkan (iii) terdapat $s, t \in S$ sehingga $sL \subseteq W$ dan $tW \subseteq L$. Dengan demikian, $sL \subseteq W = (L : M)M \subseteq L$. ■

Teorema 5 (Anderson et al., 2020)

Jika $S \subseteq T$, keduanya merupakan $m.c.s.$ dari ring R , dan M R -modul adalah S -modul perkalian, maka M R -modul adalah T -modul perkalian.

Bukti:

Misal $S \subseteq T$, keduanya merupakan $m.c.s.$ dari ring R , dan M R -modul adalah S -modul perkalian. Akan dibuktikan bahwa M R -modul adalah T -modul perkalian. Ambil L submodul dari M sebarang. Perhatikan bahwa, M R -modul adalah S -modul perkalian sehingga terdapat $s \in S \subseteq$



T dan I ideal R sedemikian sehingga $sL \subseteq IM \subseteq L$. Dengan demikian, untuk setiap L submodul dari M , terdapat $s \in T$ dan I ideal R sehingga $sL \subseteq IM \subseteq L$. Jadi, M R -modul adalah T -modul perkalian. ■

Lemma 3 (Anderson et al., 2020)

Jika M R -modul maka $M = RM$.

Bukti:

Misal M R -modul. Akan dibuktikan bahwa $M = RM$.

- 1) Ambil $m \in M$ sebarang. Perhatikan bahwa, $m = 1_R m \in RM$ sehingga $M \subseteq RM$.
- 2) Ambil $x \in RM$ sebarang, tulis $x = \sum_{i=1}^n r_i m_i$ dengan $r_i \in R$, $m_i \in M$. Perhatikan bahwa, $x = \sum_{i=1}^n r_i m_i \in M$ karena M R -modul sehingga $RM \subseteq M$.

Berdasarkan (1) dan (2) terbukti bahwa $M = RM$. ■

Lemma 4 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Jika M R -modul, T subring dari R , dan J ideal di T maka RJ ideal di R .

Bukti:

Misal M R -modul, T subring dari R , dan J ideal di T . Akan dibuktikan bahwa RJ ideal di R .

- 1) $RJ \neq \emptyset$
 $0 = 0j \in RJ$ untuk suatu $j \in J$
 $\therefore RJ \neq \emptyset$
- 2) $RJ \subseteq R$
 Ambil $x \in RJ$ sebarang, tulis $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ dengan $a_i \in R$, $b_i \in J$. Perhatikan bahwa, $b_i \in J \subseteq T \subseteq R$ sehingga $b_i \in R$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Akibatnya, $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in R$. Jadi, $RJ \subseteq R$.
- 3) Ambil $r \in R$, $x, y \in RJ$ sebarang, tulis $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ dan $y = \sum_{j=1}^m p_j q_j$ dengan $a_i, p_j \in R$, dan $b_i, q_j \in J$. Perhatikan bahwa,
 $x - y = \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{j=1}^m p_j q_j \in RJ$,
 $rx = r \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n r(a_i b_i) = \sum_{i=1}^n (ra_i) b_i \in RJ$.

Berdasarkan (1), (2), dan (3) terbukti bahwa RJ ideal di R . ■

Teorema 6 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Diberikan R ring komutatif, T subring dari R , dan M R -modul. Jika S merupakan $m.c.s.$ dari T dan M T -modul adalah S -modul perkalian maka M R -modul adalah S -modul perkalian.

Bukti:

Diketahui R ring komutatif, T subring dari R , dan M R -modul. Misal S $m.c.s.$ dari T dan M T -modul adalah S -modul perkalian. Akan dibuktikan bahwa M R -modul adalah S -modul perkalian. Ambil L submodul dari M R -modul sebarang. Perhatikan bahwa, T subring dari R sehingga L merupakan submodul dari M T -modul. Karena M T -modul adalah S -modul perkalian maka terdapat $s \in S$ dan J ideal dari T sehingga $sL \subseteq JM \subseteq L$. Berdasarkan Lemma 3 dan Lemma 4, $M = RM$ dan RJ ideal di R sehingga pilih $I = RJ$ ideal R . Akibatnya, $sL \subseteq JM = J(RM) = (JR)M = (RJ)M = IM \subseteq L$. Jadi, M R -modul adalah S -modul perkalian. ■

Suatu M R -modul disebut modul setia (*faithful module*) jika $\text{Ann}_R(M) = 0$. Di samping itu, suatu submodul $W \leq_R M$ disebut *pure submodule* jika $IW = IM \cap W$ untuk setiap I ideal dari R (Tercan & Yücel, 2016).

Teorema 7 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Setiap *pure submodule* dari suatu S -modul perkalian adalah S -modul perkalian.

Bukti:

Misalkan M R -modul adalah S -modul perkalian. Ambil W *pure submodule* dari M sebarang. Akan dibuktikan bahwa W R -modul adalah S -modul perkalian. Ambil X submodul dari W sebarang. X merupakan submodul dari M karena $X \subseteq W \subseteq M$ maka $X \subseteq M$, dan $\alpha a + b \in X$ untuk setiap $\alpha \in R$, $a, b \in X$. Karena X submodul dari M dan M R -modul adalah S -modul perkalian maka terdapat $s \in S$ dan I ideal R sehingga $sX \subseteq IX \subseteq X$. Selanjutnya, W *pure*



submodule dari M maka $IW = W \cap IM \subseteq W \cap X = X$. Perhatikan bahwa, $sx \in sX$ untuk suatu $x \in X$. Karena X submodule W artinya $X \subseteq W$ maka $sx \in sW \subseteq W$. Akibatnya, $sX \subseteq W \cap (sX)$, dan $W \cap (sX) \subseteq sX$ sehingga diperoleh $sX = W \cap (sX)$. Jadi, $sX = W \cap (sX) \subseteq W \cap IM = IW \subseteq X$ sehingga W R -modul adalah S -modul perkalian. ■

Teorema 8 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Jika R daerah integral, M R -modul adalah modul setia dan S -modul perkalian maka setiap $W \leq_R M$ dengan $S \cap \text{Ann}_R(W) = \emptyset$ adalah modul setia.

Bukti:

Misal R daerah integral, M R -modul adalah modul setia dan S -modul perkalian. Ambil $W \leq_R M$ sebarang dengan $S \cap \text{Ann}_R(W) = \emptyset$. Akan dibuktikan bahwa W adalah modul setia. Dengan kata lain akan ditunjukkan $\text{Ann}_R(W) = 0$. Perhatikan bahwa, jika $W = 0$ maka $\text{Ann}_R(W) = R$ sehingga $S \cap \text{Ann}_R(W) = S$ yang bertentangan dengan hipotesis bahwa $S \cap \text{Ann}_R(W) = \emptyset$. Jadi, $W \neq 0$. Selanjutnya, M R -modul adalah S -modul perkalian artinya terdapat $s \in S \subseteq R$ dan I ideal R sedemikian sehingga $sW \subseteq IM \subseteq W$. Jika $I = 0$ maka $sW \subseteq IM = 0$ sehingga $sW = 0$. Akibatnya, $s \in \text{Ann}_R(W)$ yang bertentangan dengan $S \cap \text{Ann}_R(W) = \emptyset$. Jadi, $I \neq 0$. Selanjutnya, ambil $r \in \text{Ann}_R(W)$ sebarang, artinya $r \in R$ dimana $rW = 0$. Diperoleh $rIM \subseteq rW = 0$ sehingga $rIM = 0$. Perhatikan bahwa, $riM = 0$ untuk setiap $i \in I$. Karena M modul setia maka $ri = 0$. Akibatnya, $rI = 0$ tetapi $I \neq 0$ dan R daerah integral sehingga $r = 0$. Jadi, $\text{Ann}_R(W) = 0$ atau dengan kata lain W adalah modul setia. ■

Misalkan R daerah integral dan M R -modul. Modul M disebut *divisible* jika untuk setiap $m \in M$ dan setiap $r \in R, r \neq 0$, terdapat $n \in M$ sedemikian sehingga $m = rn$ (Tercan & Yücel, 2016). Di samping itu, suatu $m \in M$ disebut elemen torsi jika terdapat $r \in R, r \neq 0_R$ sehingga $rm = 0$ (Roman, 2008). Himpunan yang berisi elemen-elemen torsi dinotasikan dengan $T(M)$ dan didefinisikan sebagai $T(M) = \{m \in M | \exists r \in R, r \neq 0 \ni rm = 0\}$. Perhatikan kembali bahwa M disebut modul bebas torsi (*torsion-free module*) jika M memiliki tepat satu elemen torsi yaitu $0 \in M$, atau ekuivalen dengan $T(M) = 0$ (Lawrence & Zorzitto, 2021). Sebaliknya, M disebut modul torsi (*torsion module*) jika semua elemen M merupakan elemen torsi, atau ekuivalen dengan $T(M) = M$ (Robinson, 2022).

Teorema 9 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Jika R daerah integral, dan M R -modul adalah modul bebas torsi dan *divisible* maka pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) M R -modul adalah S -modul perkalian
- (ii) M R -modul adalah *simple module*
- (iii) M R -modul perkalian

Bukti:

Misal R daerah integral, M R -modul adalah modul bebas torsi dan *divisible*.

- (i) $\Rightarrow$ (ii):

Misal M R -modul adalah S -modul perkalian. Akan dibuktikan bahwa M R -modul adalah *simple module* yang berarti submodule dari M hanya 0 dan M itu sendiri. Ambil L submodule dari M sebarang. Karena M R -modul adalah S -modul perkalian, terdapat $s \in S \subseteq R$ dan I ideal R sehingga $sL \subseteq IM \subseteq L$. Andaikan $L \neq 0$. Jika $I = 0$ maka $sL \subseteq IM = 0$ sehingga $sL = 0$. Ambil $l \in L \subseteq M$ sebarang, diperoleh $sl \in sL = 0$. Karena $s \neq 0$ dan $sl = 0$ maka $l \in T(M)$. M modul bebas torsi sehingga $T(M) = 0$. Akibatnya, $l \in T(M) = 0$ sehingga $L = 0$ (kontradiksi). Jadi, $L = 0$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $L = M$. Karena L submodule dari M maka $L \subseteq M$. Sebaliknya, ambil $m \in M$ sebarang. Perhatikan bahwa, M *divisible* yang berarti untuk setiap $i \in I \subseteq R, i \neq 0$, terdapat $n \in M$ sehingga $m = in$. Akibatnya, $m = in \in IM \subseteq L$ sehingga $m \in L$. Jadi, $M \subseteq L$. Karena $L \subseteq M$ dan $M \subseteq L$ maka $L = M$. Dengan demikian, M R -modul adalah *simple module*.

• (ii) $\Rightarrow$ (iii):

Misal M R -modul adalah *simple module*. Akan dibuktikan bahwa M R -modul perkalian. Ambil L submodul dari M sebarang. Karena M *simple module* maka hanya ada dua kemungkinan L , yaitu $L = 0$ atau $L = M$. Untuk $L = 0$, pilih $I = 0$ sehingga $L = 0 = 0M = IM$. Untuk $L = M$, pilih $I = R$ sehingga $L = M = RM = IM$. Akibatnya, $L = IM$. Dengan demikian, untuk setiap L submodul dari M , terdapat I ideal di R sedemikian sehingga $L = IM$. Jadi, M R -modul perkalian.

• (iii) $\Rightarrow$ (i): jelas karena setiap modul perkalian adalah S -modul perkalian. ■

Lemma 5 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Jika M R -modul maka untuk setiap $m \in M$, $Rm = \{rm | r \in R\}$ merupakan submodul dari M .

Bukti:

Misal M R -modul. Ambil $m \in M$ sebarang. Akan dibuktikan bahwa Rm submodul dari M .

1) $Rm \neq \emptyset$

$$0 = 0m \in Rm.$$

$$\therefore Rm \neq \emptyset$$

2) $Rm \subseteq M$

Ambil $p \in Rm$ sebarang, tulis $p = rm$ untuk suatu $r \in R$. Perhatikan bahwa, $p = rm \in M$ karena M R -modul. Jadi, $Rm \subseteq M$.

3) Ambil $\alpha \in R$, $p, q \in Rm$ sebarang, tulis $p = r_1m$ dan $q = r_2m$ untuk suatu $r_1, r_2 \in R$.

$$\text{Perhatikan bahwa, } \alpha p + q = \alpha(r_1m) + r_2m = (\alpha r_1)m + r_2m = (\alpha r_1 + r_2)m \in Rm.$$

Berdasarkan (1), (2), dan (3), terbukti bahwa Rm submodul dari M . ■

Teorema 10 (Baupradist & Hukaew, 2024)

Diberikan R daerah integral, dan M R -modul suatu modul setia dan modul torsi. Jika M R -modul merupakan S -modul perkalian maka untuk setiap $m \in M$, terdapat $s \in S$ sedemikian sehingga $sm = 0$.

Bukti:

Misal R daerah integral, M R -modul suatu modul setia dan modul torsi, serta M R -modul merupakan S -modul perkalian. Ambil $m \in M$ sebarang. Perhatikan bahwa, untuk $m = 0$, pilih $s = 1 \in S$ sedemikian sehingga $sm = 1m = 1(0) = 0$. Di sisi lain, untuk $0 \neq m \in M$, dan M modul torsi maka terdapat $a \in R$, $a \neq 0_R$ sehingga $am = 0$. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 5, Rm submodul dari M . Karena M R -modul merupakan S -modul perkalian maka untuk setiap Rm submodul dari M , terdapat $s \in S$ dan I ideal R sedemikian sehingga $sRm \subseteq IM \subseteq Rm$. Akibatnya, $aIM \subseteq aRm = Ram = 0$ sehingga $aIM = 0$. Perhatikan bahwa, $aiM = 0$ untuk setiap $i \in I$. Karena M modul setia maka $ai = 0$. Akibatnya, $aI = 0$ tetapi $a \neq 0_R$ dan R daerah integral sehingga $I = 0$. Dengan demikian, $sm \in sRm \subseteq IM = 0$. Jadi, $sm = 0$. ■

E. Pembahasan

Anderson et al. (2020) sebelumnya telah memperkenalkan perumuman dari modul perkalian yang disebut dengan S -modul perkalian dalam penelitiannya yang berjudul *On S-Multiplication Modules*. Selanjutnya, Baupradist & Hukaew (2024) membahas lebih lanjut tentang karakteristik S -modul perkalian dimana modul yang diberikan adalah modul uniter kanan atas suatu ring R . Namun, keseluruhan pembuktian dari teorema-teorema terkait karakteristik S -modul perkalian dalam penelitian tersebut belum lengkap sehingga dibahas dan dibuktikan secara lebih detail dalam penelitian ini. Selain itu, diperoleh hasil bahwa karakteristik S -modul perkalian berlaku untuk modul uniter kiri atas ring R , dan telah dibuktikan bahwa setiap modul perkalian adalah S -modul perkalian.



F. Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan dan membuktikan sepuluh teorema terkait karakteristik S -modul perkalian yang terdapat dalam penelitian terdahulu. Hasil penelitian menunjukkan bahwa karakteristik S -modul perkalian berlaku apabila modul yang diberikan adalah modul uniter kiri atas ring R . Dalam penelitian ini juga telah dibuktikan bahwa setiap modul perkalian adalah S -modul perkalian.

Penelitian ini membahas karakteristik S -modul perkalian dari suatu M R -modul secara umum sehingga penelitian selanjutnya dapat difokuskan pada kajian yang lebih spesifik, misalnya pada modul kuosien. Selain itu, karakteristik S -modul perkalian yang berkaitan dengan homomorfisma modul belum dibahas dalam penelitian ini sehingga dapat diteliti lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

- Alsuraiheed, T. M. A. (2019). *Multiplication Rings and Multiplication Modules*. Sheffield: University of Sheffield.
- Anderson, D. D., Arabaci, T., Tekir, Ü., & Koç, S. (2020). On S -Multiplication Modules. *Communications in Algebra*, 48(8), 3398–3407. <https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1737873>.
- Barnard, A. (1981). Multiplication Modules. *Journal of Algebra*, 71(1), 174–178.
- Baupradist, S., & Hukaew, K. (2024). More Characterizations of S -Multiplication Modules. *Palestine Journal of Mathematics*, 13(2), 96–104.
- Chang, S.-T. (2024). *Advanced Linear Algebra: With an Introduction to Module Theory*. Singapore: World Scientific.
- DeBonis, M. J. (2024). *Fundamentals of Abstract Algebra*. Boca Raton: CRC Press.
- Khattar, D., & Agrawal, N. (2023a). *Group Theory*. Cham: Springer Nature Switzerland AG.
- Khattar, D., & Agrawal, N. (2023b). *Ring Theory*. Cham: Springer Nature Switzerland AG.
- Lawrence, J. W., & Zorzitto, F. A. (2021). *Abstract Algebra: A Comprehensive Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Loehr, N. A. (2024). *Advanced Linear Algebra*. Boca Raton: CRC Press.
- Ou-azzou, H., Najmeddine, M., Aydin, N., & Mouloua, E. M. (2024). On The Algebraic Structure of (M, σ, δ) -Skew Codes. *Journal of Algebra*, 637, 156–192. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.09.014>.
- Robinson, D. J. S. (2022). *Abstract Algebra: An Introduction with Applications*. Berlin: Walter de Gruyter GmbH.
- Roman, S. (2008). *Advanced Linear Algebra*. New York: Springer Science.
- Tercan, A., & Yücel, C. C. (2016). *Module Theory, Extending Modules and Generalizations*. Cham: Springer International Publishing AG.
- Titahena, A. A., Lesnussa, Y. A., Persulesy, E. R., & Patty, D. (2018). Syarat Perlu dan Syarat Cukup *Submodul Pure* pada Modul Perkalian. *Jurnal Matematika Integratif*, 14(2), 105–112. <https://doi.org/10.24198/jmi.v14.n2.2018.105-112>.

