

PEMODELAN MASALAH RUTE PERJALANAN MENGUNAKAN GRAF HAMILTON DAN EVALUASI WAKTU TEMPUH MINIMUM

Eka Yunita Suci Permatasari¹, Aulia Firman², Hamda³
Program Pascasarjana, Universitas Negeri Makassar^{1,2,3}
Email: ekaayntaa2506@gmail.com¹, auliafirmanbn16@gmail.com²,
hamdamathunm@unm.ac.id³

Corresponding Author: Eka Yunita Suci Permatasari, email : a.muhammad.nasir@unm.ac.id

Abstrak. Perencanaan rute perjalanan wisata menjadi aspek penting karena keterbatasan waktu yang dimiliki wisatawan serta potensi pemborosan waktu akibat pemilihan rute yang tidak optimal. Dalam kenyataannya, wisatawan sering dihadapkan pada banyak pilihan jalan tanpa melakukan analisis yang mendalam untuk menentukan jalan terbaik. Akibatnya, tujuan penulisan ini adalah untuk menyediakan metode matematis untuk menentukan rute perjalanan yang paling efektif. Pada kasus tour Eropa Barat yang melibatkan lima negara tujuan, pemodelan graf berbobot digunakan untuk membandingkan beberapa lintasan alternatif. Hasil analisis menunjukkan bahwa rute berbeda dalam waktu tempuh, dengan perjalanan tercepat 41 jam 20 menit dan perjalanan terlama 42 jam 45 menit. Hasil ini menunjukkan bahwa rute yang tepat dapat secara signifikan meningkatkan efisiensi waktu perjalanan. Namun, ketika jumlah simpul meningkat, penentuan lintasan Hamilton secara manual menjadi kurang efektif. Oleh karena itu, untuk mendapatkan solusi yang lebih efisien dan praktis untuk perencanaan perjalanan, disarankan untuk menggunakan algoritma komputasi atau metode optimasi berbasis teknologi.

Kata Kunci: Graf, Teorema Hamilton, Optimasi Rute, Waktu Perjalanan

Abstract. Tour itineraru planning is a critical aspect due to tourists time constraints and the potential for wasted time resulting from suboptimal route selection. In reality, tourists are often faced with numerous route options without conducting a thorough analysis to determine the best route. Consequently, the objective of this paper is to provide a mathematical method for determining the most efficient travel route. In the case of a Wastern Europe tour involving five destination countries, weighted graph modeling was used to compare several alternative routes. The analysis results show that the routes differ in travel time, with the fastest trip taking 41 hours and 20 minutes and the longest trip taking 42 hours and 45 minutes. The results indicate that the right route can significantly improve travel time efficiency. However, as the number of nodes increases, manually determining the Hamiltonian path becomes less effective. Therefore, to obtain a more efficient and practical solution for travel planning, it is recommended to use computational algorithms or technology-based optimization methods.

Keywords: Graph, Hamilton's theorem, Route Optimization, Travel Time

A. Pendahuluan

Perjalanan liburan adalah sesuatu yang umum untuk dilakukan bersama keluarga atau teman terdekat. Perjalanan ini bisa berupa pergi ke tempat bermain di kota, bertemu dengan teman di luar kota, atau bahkan pergi ke luar negeri, mulai dari Korea, Malaysia, Filipilina, sampai ke Benua lain, salah satunya adalah Benua Eropa. Tidak dapat disangkal bahwa Eropa sangat menarik sebagai tempat wisata karena pemandangannya yang indah, bangunan bersejarah yang menarik untuk difoto, dan makanannya yang beragam dan lezat.

Namun, jelas bahwa waktu kita terbatas saat melakukan liburan di Eropa, meskipun ada banyak negara dan tempat yang ingin kita kunjungi dalam waktu yang singkat. Jadi, bagaimana kita bisa memaksimalkan waktu liburan kita yang singkat? Perjalanan adalah salah satu hal yang memakan waktu saat menikmati liburan (Sanabria-codesal, 2013). Dengan memilih rute perjalanan yang tepat dalam hal ini, waktu perjalanan dapat dikurangi. Untuk masalah ini, kita



dapat menggambarkan situasi tersebut dengan menggunakan graf berbobot di mana tiap negara dianggap sebagai simpul dan perjalanan yang ditempuh dianggap sebagai sisi (Johnston dkk.,2012). Di sisi lain, pilihan rute tersebut dapat digunakan untuk menerapkan teorema Hamilton untuk memilih rute yang melalui semua negara dengan bobot terendah (Carmesin dkk., 2023).

B. Hasil dan Pembahasan

1. Kajian Teori

Graf

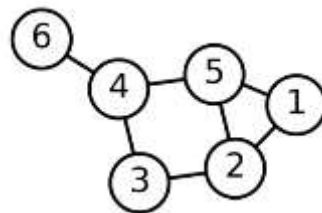
Graf dalam matematika diskrit merupakan sebuah representasi dari beberapa objek dan relasi yang dimiliki antar objek-objek tersebut. Dalam graf, representasi objek-objeknya disebut dengan simpul (*Vertex*) dan representasi relasinya disebut dengan sisi (*Edges*) dan notasinya dalam matematika adalah

$$G(V, E).$$

Keterangan:

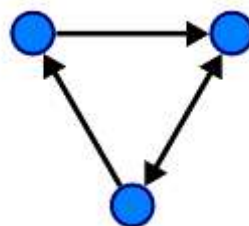
V : Himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices*).

E : Himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul.



Gambar 1 Contoh Graf

Graf dibagi menjadi graf berarah dan tidak berarah tergantung pada jenis sisinya. Dalam graf berarah, relasi objek memiliki sumber dan destinasi (s, d), tetapi dalam graf tidak berarah, relasi objek (a, b) belum tentu ada.



Gambar 2 Contoh Graf Berarah

Jenis Graf

Graf dapat dibedakan berdasarkan adanya sisi gelang atau ganda dan adanya sisi berarah. Berdasarkan keberadaan sisi gelang atau sisi ganda, graf dibedakan menjadi dua yaitu graf sederhana dan graf tidak sederhana.

1. Graf Sederhana

Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki sisi ganda maupun sisi gelang (*loop*).

2. Graf Tidak Sederhana

Graf tidak sederhana dibagi menjadi dua yaitu, graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang memiliki lebih dari satu sisi untuk menghubungkan dua simpul yang sama. Sedangkan graf semu adalah graf yang memiliki sisi untuk menghubungkan simpul dengan dirinya sendiri.



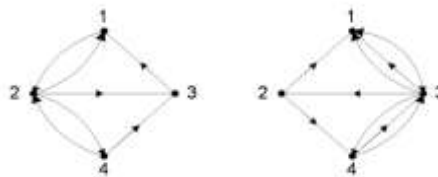
Graf berdasarkan arah dari sisinya dapat dibedakan menjadi dua, yaitu graf tidak berarah dan graf berarah.

1. Graf Tidak Berarah

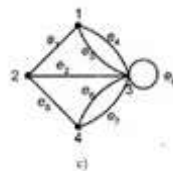
Graf tidak berarah adalah graf yang sisinya tidak memiliki orientasi arah (ditunjukkan pada Gambar 1 dan 4).

2. Graf Berarah

Graf berarah adalah graf yang sisi-sisinya memiliki orientasi arah sehingga representasi relasinya memiliki peran sebagai sumber dan destinasi. Bila terdapat sebuah sisi yang merepresentasikan relasi antara (a, b), maka sisi tersebut tidak mendefinisikan relasi antara (b, a). Graf berarah sendiri terbagi menjadi 2, yaitu graf berarah biasa dan graf berarah ganda (ditunjukkan pada Gambar 3).



Gambar 3 Contoh Graf Berarah dan Graf Berarah Ganda



Gambar 4 Contoh Graf Semu

Tabel 1 Jenis Graf

Jenis Graf	Orientasi Arah	Sisi Ganda	Sisi Gelang (Loop)
Graf Sederhana	Tidak	Tidak	Tidak
Graf Ganda	Tidak	Ya	Tidak
Graf Semu	Tidak	Ya	Ya
Graf Berarah	Ya	Tidak	Ya
Graf Berarah Ganda	Ya	Ya	Ya

Terminologi Graf

Pada graf terdapat beberapa istilah yang perlu diketahui, yaitu:

1. Ketetangaan (*Adjacent*)

Ketetangaan adalah dua buah simpul yang dihubungkan dengan sebuah sisi.

2. Bersisian (*Incidency*)

Bersisian adalah sebuah sisi yang menghubungkan dua simpul, sebagai contoh apabila sisi a menghubungkan X dan Y, maka a bersisian X dan a bersisian Y.

3. Simpul Terpencil

Simpul terpencil adalah sebuah simpul yang tidak terhubung dengan simpul lainnya.

4. Graf Kosong

Graf yang simpul-simpulnya tidak terhubung sama sekali.

5. Derajat (*Degree*)

Representasi dari jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul. Menurut teorema Lemma Jabat Tangan, jumlah dari derajat semua simpul adalah dua kali jumlah sisinya sehingga derajat simpul yang berjumlah ganjil tidak mungkin berjumlah ganjil.

6. Lintasan (*Path*)



Lintasan adalah sisi-sisi yang dilalui dari simpul awal sampai simpul akhir.

7. Siklus

Siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir di simpul yang sama.

8. Keterhubungan

Graf yang semua simpulnya saling terhubung, tetapi tidak perlu lengkap.

9. Graf Berbobot

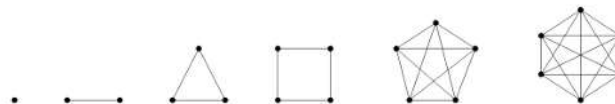
Graf berbobot adalah graf yang sisinya merepresentasikan sebuah nilai.

Graf Khusus

Terdapat beberapa graf yang memiliki kriteria khusus, yaitu:

1. Graf Lengkap

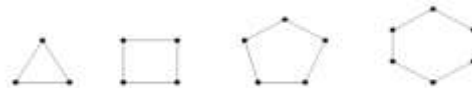
Graf lengkap adalah graf yang semua simpulnya memiliki relasi dengan seluruh simpul lainnya.



Gambar 5 Contoh Graf Lengkap

2. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf yang semua simpulnya hanya berderajat 2.



Gambar 6 Contoh Graf Lingkaran

3. Graf Teratur

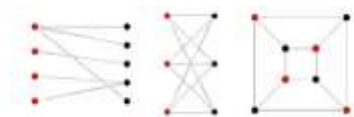
Graf teratur adalah graf yang semua simpulnya berderajat sama.



Gambar 7 Contoh Graf Teratur

4. Graf Bipartite

Graf bipartite adalah graf yang simpulnya terbagi menjadi dua bagian himpunan.



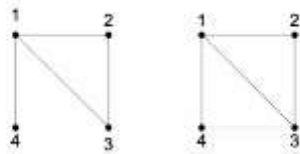
Gambar 8 Contoh Graf Bipartite

2. Hamilton

Graf Hamilton adalah graf yang memiliki sirkuit Hamilton, yaitu sirkuit yang melalui semua simpulnya tepat satu kali, kecuali simpul awalnya (Salman dkk., 2003). Karena simpul awal sama dengan simpul akhir. Sedangkan graf semi-Hamilton adalah graf yang memiliki



lintasan Hamilton, yaitu lintasan yang melewati semua simpulnya tepat satu kali, tetapi tidak kembali ke simpul awal. Graf Hamilton pasti graf semi-Hamilton, tetapi tidak sebaliknya (Gani & Latha, 2016).



Gambar 9 Contoh Graf Semi-Hamilton dan Graf Hamilton

Terdapat teorema yang menyatakan bahwa syarat cukup agar graf sederhana G dengan $n (\geq 3)$ buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit $\frac{n}{2}$ yaitu $d(v) \geq \frac{n}{2}$ untuk setiap simpul v di G . Berdasarkan teorema tersebut, maka dapat dikatakan bahwa seluruh graf lengkap merupakan graf Hamilton. Untuk menghitung jumlah kombinasi sirkuit yang dapat dihasilkan oleh graf lengkap, dapat dihitung dengan $\frac{(n-1)!}{2}$ dengan n adalah jumlah simpul pada graf tersebut.

3. Penerapan Graf Hamilton pada Rute Tour Eropa Barat

a. Eropa Barat

Dengan luas 10.180.000 km², Benua Eropa merupakan benua terkecil di dunia setelah Australia. Juga, ada sekitar 7245,5 juta jiwa orang yang tinggal di sana, menjadikannya benua terpadat setelah Benua Asia dan Afrika. Secara geografis, Benua Eropa terletak di daratan yang lebih dikenal dengan Eurasia. Sejarah Eropa menarik wisatawan dengan banyaknya bangunan bersejarah yang masih ada. Selain itu, Eropa memiliki daya tarik yang kuat terhadap variasi budaya dan bahasa di antara negara-negara lain, seperti Indonesia.

Pada saat ini, Eropa dibagi menjadi wilayah-wilayah berikut berdasarkan budayanya: Eropa Barat, Eropa Timur, Eropa Utara, Eropa Tengah, Eropa Selatan, dan Eropa Tenggara. Dalam artikel ini, penulis akan membahas negara-negara di Eropa Barat. Klasifikasi Negara Eropa Barat menurut "Geography Realms, Regions, and Concepts" terdiri dari 13 Negara, yaitu:

- a. Austria
- b. Belgium
- c. Republik Czech
- d. Perancis
- e. Jerman
- f. Ireland
- g. Liechtenstein
- h. Luxembourg
- i. Monako
- j. Belanda
- k. Switzerland
- l. Inggris

(Nijman, P.O. Muller, and H. J. de Bilj, 1971)





Gambar 10 Map Eropa Barat

Pada pembahasan kali ini, penulis mengambil waktu libur yang digunakan untuk keliling Eropa Barat adalah 14 hari sehingga tidak memungkinkan untuk mengunjungi semua negara yang ada di Eropa dalam satu kali perjalanan. Akan dipilih 5 dari 13 negara yang ada untuk dikunjungi, dengan kombinatorial terdapat sebanyak ${}_{13}C_5 = 1287$ kombinasi yang ada, sehingga penulis menentukan negara yang akan dikunjungi adalah sebagai berikut

- 1) Inggris → London (L)
- 2) Perancis, → Paris (P)
- 3) Austria, → Vienna (V)
- 4) Jerman, → Berlin (B)
- 5) Belanda, → Amsterdam (A)

Dengan Lokasi awal diasumsikan dari Jakarta, Indonesia

Representasi Waktu Perjalanan menjadi Graf

Perjalanan ini diasumsikan akan berawal dari Jakarta, Indonesia dan berakhir di Jakarta juga sehingga berikut adalah data waktu yang diperlukan untuk pergi ke lima negara tersebut dengan mengambil waktu tercepat dari yang ditempuh dengan pesawat.

Hasil penelitian dideskripsikan secara jelas dan disajikan pula dalam bentuk tabel, gambar, dan/atau grafik disertai penjelasan maknanya. Pembahasan berisi tentang interpretasi data kaitannya dengan teori pendukung, kebaruan penelitian dan penjelasan tentang keunggulan dan kelemahan yang ditemui dalam penelitian.

Tabel 2 Durasi Perjalanan dari Jakarta ke Negara Tujuan

Negara Tujuan	Durasi Perjalanan
London, Inggris	17 jam 55 menit
Paris, Perancis	18 jam
Vienna, Austria	17 jam 55 menit
Berlin, Jerman	17 jam 40 menit
Amsterdam, Belanda	17 jam 45 menit

(Aisha dkk., 2021)

Sedangkan waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan antar negara tersebut menggunakan pesawat adalah sebagai berikut.

Tabel 3 Durasi Perjalanan dari masing-masing Negara

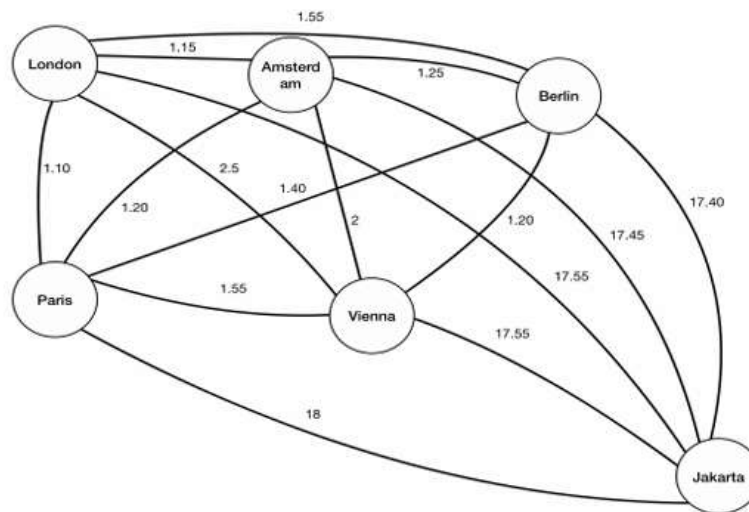
Negara	Durasi Perjalanan
London, Inggris - Paris, Perancis	1 jam 10 menit
London, Inggris - Vienna, Austria	2 jam 5 menit
London, Inggris - Berlin, Jerman	1 jam 50 menit
London, Inggris - Amsterdam, Belanda	1 jam 15 menit
Paris, Perancis - Vienna, Austria	1 jam 55 menit



Negara	Durasi Perjalanan
Paris, Perancis - Berlin, Jerman	1 jam 40 menit
Paris, Perancis - Amsterdam, Belanda	1 jam 20 menit
Vienna, Austria - Berlin, Jerman	1 jam 20 menit
Vienna, Austria - Amsterdam, Belanda	2 jam
Berlin, Jerman - Amsterdam, Belanda	1 jam 25 menit

(Aisha dkk., 2021)

Representasi Graf yang digunakan untuk permasalahan ini adalah graf berbobot dan tidak berarah, sehingga perjalanan pulang dari satu negara ke negara lain dianggap sama dengan perjalanan berangkatnya. Bila direpresentasikan dalam bentuk matriks ketetanggaan dan graf, maka hubungannya masing masing menjadi sebagai berikut.



Menurut Teorema Hamilton, apabila graf tersebut adalah graf lengkap, maka graf itu dapat dipastikan merupakan graf Hamilton juga, sehingga graf representasi waktu tempuh diatas merupakan graf Hamilton. Dalam mencari kemungkinan sirkuit yang dilewati, dapat dicari dengan rumus: $\frac{(n-1)!}{2}$. Sehingga untuk kasus diatas kemungkinan sirkuit yang ada adalah 60 kombinasi. Pada makalah ini, penulis akan mencoba mengambil 10 buah sirkuit untuk dibandingkan perbedaannya.

1) Percobaan Pertama

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Amsterdam – London – Paris – Vienna – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.40 + 1.25 + 1.15 + 1.10 + 1.55 + 17.55 = 41.20 \text{ (41 Jam 20 Menit)}$$

2) Percobaan Kedua

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Vienna – London – Paris - Amsterdam – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.40 + 1.20 + 2.05 + 1.10 + 1.20 + 17.45 = 41.20 \text{ (41 Jam 20 Menit)}$$

3) Percobaan Ketiga

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Vienna – Amsterdam – London – Berlin - Paris– Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :



$$17.55 + 2 + 1.15 + 1.55 + 1.40 + 18 = 42.45 \text{ (42 jam 45 menit)}$$

4) Percobaan Keempat

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Paris – Amsterdam – Vienna – London – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.40 + 1.40 + 1.20 + 2 + 2.05 + 17.55 = 42.40 \text{ (42 jam 40 menit)}$$

5) Percobaan Kelima

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta –Amsterdam – London – Vienna – Berlin – Paris – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.45 + 1.15 + 2.05 + 1.20 + 1.40 + 18 = 42.05 \text{ (42 jam 5 menit)}$$

6) Percobaan Keenam

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – London – Paris – Amsterdam – Vienna – Berlin – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.55 + 1.10 + 1.20 + 2 + 1.25 + 17.40 = 41.30 \text{ (41 jam 30 menit)}$$

7) Percobaan Ketujuh

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Paris – Vienna – London – Amsterdam – Berlin – Jakarta. Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$18 + 1.55 + 2.05 + 1.15 + 1.25 + 17.40 = 42.20 \text{ (42 jam 20 menit)}$$

8) Percobaan Kedelapan

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Amsterdam – Paris – Berlin – London – Vienna – Jakarta. Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.45 + 1.20 + 1.40 + 1.55 + 2.5 + 17.55 = 42.40 \text{ (42 jam 40 menit)}$$

9) Percobaan Kesembilan

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – London – Amsterdam – Paris – Berlin – Vienna – Jakarta. Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.55 + 1.15 + 1.20 + 1.40 + 1.20 + 17.55 = 41.25 \text{ (41 jam 25 menit)}$$

10) Percobaan Kesepuluh

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Vienna – Amsterdam – London - Paris – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :

$$17.40 + 1.20 + 2 + 1.15 + 1.10 + 18 = 41.25 \text{ (41 jam 25 menit)}$$

(Bermond, 2019) (Rinaldi, 2016)

C. Kesimpulan

Pada percobaan tersebut, didapat waktu perjalanan tercepat untuk mengunjungi kelima negara tersebut adalah 41 jam 20 menit dengan jalur yang dilaluinya ada dua, yaitu:

a) Jakarta – Berlin – Amsterdam – London – Paris – Vienna – Jakarta,

b) Jakarta – Berlin – Vienna – London – Paris - Amsterdam – Jakarta.

Sedangkan waktu perjalanan terlama adalah 42 jam 45 menit dengan jalur yang ditempuh adalah



a) Jakarta – Vienna – Amsterdam – London – Berlin - Paris– Jakarta.

Dari data tersebut terlihat bahwa ada perbedaan selama 1 jam 25 menit antara waktu yang tercepat dan waktu yang terlama. Meskipun angka itu tidak terlalu besar, hal ini menunjukkan bahwa memilih jalur wisata yang tepat bisa memberi kemudahan bagi para wisatawan saat bepergian.

DAFTAR PUSTAKA

- Aisha, S., Yasmin, G., & Teknik, S. (2021). *Aplikasi Teorema Hamilton untuk Menentukan Rute Tour Eropa Barat*.
- Bermond, J. (2019). *Hamiltonian Graphs To cite this version : HAL Id : hal-02352666*. 127–167.
- Carmesin, S., Woller, D., Parker, D., Kulich, M., & Mansouri, M. (2023). The Hamiltonian Cycle and Travelling Salesperson problems with traversal-dependent edge deletion. *Journal of Computational Science*, 74(October), 102156. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2023.102156>
- Gani, A. N., & Latha, S. R. (2016). A new algorithm to find fuzzy Hamilton cycle in a fuzzy network using adjacency matrix and minimum vertex degree. *SpringerPlus*. <https://doi.org/10.1186/s40064-016-3473-x>
- Johnston, L., Wolfe, K., Dea, E. O., & Newcomer, N. (n.d.). *Graph Theory for Operations Research and Management : Applications in Industrial Engineering*.
- Nijman, P.O. Muller, and H. J. de Bilj, J. (1971). *Geography: Realms, Regions, and Concepts* (17th Editi).
- Rinaldi, M. (2016). *Matematika Diskrit* (Edisi Revi). Bandung: Informatika Bandung.
- Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., & Broersma, H. J. (2003). *A Note Concerning Hamilton Cycles in Some Classes of*. 35(1), 65–70.
- Sanabria-codesal, E. (2013). *no de viajes*. 6(11), 133–144.

