

BILANGAN KROMATIK GRACEFUL PADA GRAF TERKAIT LINGKARAN

Ni Kadek Ari Martadewi¹, Raphita Yanisari Silalahi², I Nengah Suparta³

Universitas Pendidikan Ganesha^{1,2,3}

Email: ari.martadewi@student.undiksha.ac.id¹, rsilalahi@undiksha.ac.id²,
nengah.suparta@undiksha.ac.id³

Coresponding Author: Ni Kadek Ari Martadewi **email:**
ari.martadewi@student.undiksha.ac.id

Abstrak. Pewarnaan *graceful* pada graf adalah suatu bentuk pewarnaan pada titik yang menginduksi pewarnaan sisi berdasarkan nilai mutlak selisih antara dua titik yang bertetangga, di mana setiap titik dan sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik *graceful*, dilambangkan dengan $\chi_g(G)$, adalah jumlah warna minimum yang memenuhi kondisi tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai eksak bilangan kromatik *graceful* pada dua variasi graf terkait lingkaran, yaitu graf bunga matahari (Sf_n) dan graf kincir angin belanda (D_n^m), yang memiliki struktur siklik dan konektivitas titik pusat yang khas. Pendekatan yang digunakan bersifat konstruktif-deduktif, yaitu dengan membangun fungsi pewarnaan titik secara eksplisit untuk setiap kasus parameter, kemudian membuktikan keoptimalannya melalui batas bawah yang diturunkan dari derajat maksimum graf. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa $\chi_g(Sf_n) = 3n + 1$ untuk $n \geq 3$. Sementara itu, $\chi_g(D_n^m) = 2m + 1$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Temuan ini memberikan pemahaman yang lebih jelas mengenai pola bilangan kromatik *graceful* pada graf terkait lingkaran dengan simpul pusat dominan serta memperluas karakterisasi teoretis untuk graf berbasis pusat dengan konektivitas radial.

Kata Kunci: Pewarnaan *Graceful*, Bilangan Kromatik *Graceful*, Graf Bunga Matahari, Graf Kincir Angin Belanda.

Abstract. *Graceful coloring of a graph is a form of vertex coloring that induces edge coloring based on the absolute difference between the labels of adjacent vertices, where any two adjacent vertices and two adjacent edges have distinct colors. The graceful chromatic number, denoted by $\chi_g(G)$, is the minimum number of colors that satisfies this condition. This study aims to determine $\chi_g(G)$ for two variations of cycle-related graphs, namely the sunflower graph (Sf_n) and the dutch windmill graph (D_n^m), which exhibit cyclic structures and distinctive central vertex connectivity. The approach employed is constructive-deductive, involving the explicit construction of vertex coloring functions for each parameter case, followed by a proof of optimality using a lower bound derived from the maximum degree of the graph. The results show that $\chi_g(Sf_n) = 3n + 1$ for $n \geq 3$. Meanwhile, $\chi_g(D_n^m) = 2m + 1$ for $m \geq 2$ and $n \geq 3$. These findings provide a clearer understanding of the pattern of graceful chromatic numbers in cycle-related graphs with dominant central vertices and extend the theoretical characterization of center-based graphs with radial connectivity.*

Keywords: *Graceful Coloring, Graceful Chromatic Number, Sunflower Graph, Dutch Windmill Graph.*

A. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang memiliki peran penting dalam memodelkan hubungan antar objek melalui titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Graf G merupakan pasangan terurut $G = (V(G), E(G))$ yang terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ (Utomo, 2024). Salah satu aspek menarik dalam teori graf adalah pewarnaan, yang tidak hanya memiliki nilai teoretis, tetapi juga aplikasi praktis seperti penjadwalan, optimasi jaringan, dan desain sistem. Sejak puluhan tahun lalu, telah ada banyak publikasi mengenai graf *graceful* (Suparta dkk., 2022). Pewarnaan *graceful* adalah pengembangan dari pelabelan *graceful* yang diperkenalkan oleh Alexander Rosa pada tahun



1967 (Budayana dkk., 2018). Pewarnaan *graceful* merupakan jenis pewarnaan khusus di mana label titik menginduksi label sisi yang unik berdasarkan nilai mutlak selisih antara dua titik yang bertetangga (Kristiana dkk., 2023). Jelas bahwa setiap graf memiliki pewarnaan *graceful* (Suparta dkk., 2025). Namun, menentukan bilangan kromatik *graceful* pada berbagai keluarga graf, khususnya graf terkait lingkaran seperti graf bunga matahari (Sf_n) dan graf kincir angin Belanda (D_n^m), masih menjadi tantangan terbuka. Permasalahan penelitian yang diangkat dalam studi ini adalah menentukan nilai $\chi_g(G)$ untuk Sf_n dan D_n^m secara eksak.

Tujuan penelitian ini dirumuskan sebagai berikut: (1) menentukan bilangan kromatik *graceful* dari graf bunga matahari (Sf_n) untuk berbagai nilai n ; (2) menentukan bilangan kromatik *graceful* dari graf kincir angin Belanda (D_n^m). Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi pada pemahaman lebih lanjut tentang sifat pewarnaan *graceful* dalam konteks graf terkait lingkaran.

Rencana pemecahan masalah meliputi analisis struktur graf untuk mengidentifikasi batas-batas $\chi_g(G)$ sehingga diperoleh nilai eksak dari $\chi_g(G)$. Konstruksi fungsi pewarnaan yang memenuhi syarat *graceful* yaitu, semua titik yang bertetangga memiliki warna berbeda dan semua sisi yang bertetangga memiliki label yang unik. Pendekatan ini akan divalidasi melalui pemrograman.

Banyak graf terkait lingkaran memiliki bilangan kromatik *graceful* yang telah ditentukan. Graf gir (G_n) memiliki $\chi_g(G_n) = 6$ untuk $n = 4$ dan $\chi_g(G_n) = n + 1$ untuk $n \geq 5$. Graf helm (H_n) memiliki $\chi_g(H_n) = 8$ untuk $n = 4, 5, 6$ dan $\chi_g(H_n) = n + 1$ untuk $n \geq 7$. Graf helm tertutup (CH_n) memiliki $\chi_g(CH_n) = 8$ untuk $n = 4, 5, 6$ dan $\chi_g(H_n) = n + 1$ untuk $n \geq 7$. Graf bunga (Fl_n) memiliki $\chi_g(Fl_n) = 2n + 1$ untuk $n \geq 4$. Graf jaring laba-laba (Wb_n) memiliki $\chi_g(Wb_n) = 8$ untuk $n = 4, 5, 6$ dan $\chi_g(H_n) = n + 1$ untuk $n \geq 7$ (Khoirunnisa dkk., 2021; Dwi dkk., 2024). Namun, variasi seperti Sf_n dan D_n^m belum banyak dieksplorasi secara mendalam. Sf_n dapat dilihat sebagai perluasan Fl_n dengan struktur tambahan, sedangkan D_n^m memiliki kemiripan dengan graf kipas. Kajian ini akan membangun landasan dari hasil-hasil tersebut untuk mengeksplorasi bilangan kromatik *graceful* pada struktur yang lebih kompleks.

$G(V, E)$ menyatakan graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ (Suparta dan Ariawan, 2020). Jumlah titik dan sisi dalam sebuah graf masing-masing disebut dengan ordo (*order*) dan ukuran (*size*) dari graf G . Secara matematis, ordo dilambangkan dengan $|V(G)|$ dan ukuran dilambangkan dengan $|E(G)|$ (Annadhifi dkk., 2024).

Pewarnaan *graceful* untuk graf G adalah pewarnaan titik $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, untuk suatu bilangan bulat positif k , yang menginduksi pewarnaan sisi $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$, untuk setiap sisi $uv \in E$. Nilai k terkecil di mana c merupakan pewarnaan *graceful* untuk G disebut bilangan kromatik *graceful* dari G , dilambangkan dengan $\chi_g(G)$ (Suparta dkk., 2023).

Definisi 1.1 Graf lingkaran, dilambangkan sebagai C_n adalah graf sederhana yang terdiri dari n titik yang tersusun membentuk lintasan tertutup, di mana setiap titik terhubung ke tepat dua titik lainnya melalui sisi. Graf ini memiliki n titik dan n sisi (Gallian, 2022).

Definisi 1.2 Graf roda, dilambangkan sebagai W_n , adalah graf yang terdiri dari sebuah lingkaran dengan n titik (C_n) dan satu titik pusat (*hub*) yang terhubung ke semua titik pada siklus tersebut. Graf ini memiliki $n + 1$ titik (1 pusat + n siklus) dan $2n$ sisi (n sisi siklus + n sisi dari pusat ke siklus) (Javaid dkk., 2021).

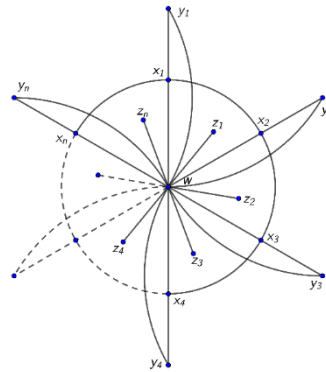
Definisi 1.3 Graf helm, sering dilambangkan sebagai H_n adalah graf yang diperoleh dari graf roda W_n dengan menambahkan satu titik *pendant* (daun) ke setiap titik pada siklus C_n . Graf ini memiliki $2n + 1$ titik (1 pusat + n siklus + n *pendant*) dan $3n$ sisi (n sisi siklus + n sisi dari pusat ke siklus + n sisi ke titik *pendant*) (Javaid dkk., 2021).

Definisi 1.4 Graf bunga, dilambangkan sebagai Fl_n , adalah graf yang diperoleh dari graf helm H_n dengan menambahkan sisi-sisi yang menghubungkan setiap titik *pendant* dengan titik



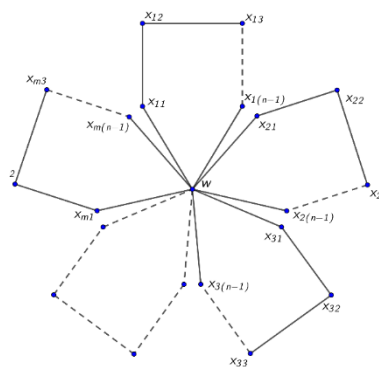
pusat. Graf ini memiliki $2n + 1$ titik (1 pusat + n rim + n *pendant*) dan $4n$ sisi (n sisi siklus rim + n sisi dari pusat ke rim + n sisi ke *pendant* + n sisi luar) (Javaid dkk., 2021).

Definisi 1.5 Graf bunga matahari dinotasikan Sf_n diperoleh dari graf bunga dengan menambahkan sebanyak n titik *pendant* yang terhubung dengan titik pusat. Jadi graf bunga matahari mempunyai ordo $3n + 1$ dan ukuran $5n$ (Javaid dkk., 2021).



Gambar 1 Graf Sf_n

Definisi 1.6 Graf kincir angin Belanda, dilambangkan sebagai D_n^m , adalah graf yang terdiri dari m buah lingkaran C_n yang semuanya berbagi satu titik yang sama. Graf ini memiliki $m(n - 1) + 1$ titik (1 pusat + m kelompok titik dari siklus) dan mn sisi (setiap lingkaran memiliki n sisi) (Firman dkk., 2022).



Gambar 2 Graf D_n^m

Lemma 1.1 Jika G adalah graf terhubung *nontrivial*, maka $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$, dengan $\Delta(G)$ merupakan nilai derajat tertinggi di antara semua titik dalam graf G (Byers, 2018).

Teorema 1.1 Jika H merupakan sebuah graf bagian dari graf G , maka $\chi_g(H) \leq \chi_g(G)$ (Dhami, 2017) dalam (Firdausy dkk., 2021).

B. Metode Penelitian

Penelitian ini menerapkan tiga metode utama untuk menentukan bilangan kromatik *graceful* pada graf bunga matahari (Sf_n) dan graf kincir angin belanda (D_n^m). (1) Metode kepustakaan digunakan untuk mengkaji literatur terkait pewarnaan graf, khususnya pewarnaan *graceful*. Proses ini melibatkan pencarian referensi dari buku, jurnal ilmiah, dan artikel, diikuti dengan analisis untuk mengidentifikasi gagasan yang relevan. (2) Metode deduktif aksiomatik diterapkan untuk membuktikan pewarnaan *graceful* pada graf Sf_n dan D_n^m . Metode ini memanfaatkan prinsip pembuktian deduktif dalam logika matematika, menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk menghasilkan kesimpulan yang valid. Pendekatan ini memungkinkan pembuktian sistematis terhadap bilangan kromatik *graceful*, memastikan hasil yang diperoleh konsisten secara matematis. (3) Metode pendeteksi pola digunakan untuk

mengidentifikasi pola pewarnaan titik dan bilangan kromatik pada graf Sf_n dan D_n^m . Dengan menganalisis hasil pewarnaan, metode ini bertujuan untuk menemukan hubungan yang konsisten antara struktur graf dan bilangan kromatik *graceful*. Pendekatan ini mendukung perumusan generalisasi matematis yang dapat diterapkan pada graf serupa.

Prosedur penelitian dirancang secara sistematis untuk menentukan bilangan kromatik *graceful* pada graf bunga matahari (Sf_n) dan graf kincir angin Belanda (D_n^m). Prosedur ini meliputi langkah-langkah berikut: (1) Mengumpulkan referensi yang relevan dengan pewarnaan graf, terutama pewarnaan *graceful*, untuk membentuk kerangka teoritis yang kuat. (2) Menetapkan graf Sf_n dan D_n^m sebagai objek penelitian, yang merupakan variasi graf terkait lingkaran dengan karakteristik struktural unik. (3) Membuat konstruksi graf Sf_n dan D_n^m berdasarkan definisi matematisnya untuk memastikan kejelasan dalam analisis. (4) Mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf Sf_n dan D_n^m sebagai dasar untuk proses pewarnaan. (5) Melakukan pewarnaan *graceful* pada kedua graf, di mana setiap titik diberi label sehingga sisi-sisi yang berdekatan menghasilkan warna yang berbeda, sesuai dengan definisi pewarnaan *graceful*, lalu menentukan bilangan kromatik *graceful* untuk masing-masing graf. (6) Mengidentifikasi pola bilangan kromatik dari hasil pewarnaan titik untuk merumuskan teorema baru terkait bilangan kromatik *graceful*. (7) Membuktikan teorema yang dirumuskan menggunakan pendekatan deduktif untuk memvalidasi temuan penelitian, memastikan hasil yang dapat dipercaya dan dapat digeneralisasi.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Dalam artikel ini, akan dicari bilangan kromatik *graceful* untuk beberapa graf terkait lingkaran, yaitu graf bunga matahari (Sf_n) dan graf kincir angin belanda (D_n^m) menggunakan teorema yang sebelumnya telah diteliti dan pewarnaan *graceful*.

Teorema 3.1 Bilangan kromatik *graceful* dari graf bunga matahari (Sf_n) untuk $n \geq 3$ adalah $3n + 1$.

Bukti: Graf bunga matahari Sf_n terdiri dari titik pusat w yang terhubung ke n titik x_i , n titik y_i , dan n titik z_i , dengan tambahan sisi yang membentuk siklus luar $x_1 - x_2 - \dots - x_n - x_1$ dan sisi-sisi $x_i y_i$ yang menghubungkan titik siklus x_i dengan titik y_i . Himpunan titik adalah $V(Sf_n) = \{w\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi adalah $E(Sf_n) = \{wx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{wy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{wz_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1; i = n\}$. Sehingga, $\Delta(Sf_n) = 3n$ dan $|V(Sf_n)| = 3n + 1$.

Dari Lemma 1.1 diketahui $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$ untuk graf terhubung. Hal ini karena pewarnaan *graceful* mensyaratkan bahwa setiap titik dan tetangganya memiliki warna yang berbeda, dan titik dengan derajat maksimum $\Delta(G)$ membutuhkan setidaknya $\Delta(G) + 1$ warna, maka bilangan kromatik *graceful* dari graf terhubung selalu memenuhi $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$. Oleh karena itu, batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* graf bunga matahari adalah $\chi_g(Sf_n) \geq 3n + 1$. Selanjutnya, akan dicari batas atas menggunakan pewarnaan *graceful*. Dalam mencari batas atas bilangan kromatik *graceful* untuk graf Sf_n akan dibagi menjadi 4 kasus yaitu $n = 3$, $n = 4$, $n \geq 5$ untuk n ganjil dan $n \geq 6$ untuk n genap. Pembagian ini dikarenakan Sf_n dengan n ganjil dan genap (kecuali $n = 3$ dan $n = 4$) memiliki pola pewarnaan yang berbeda. Pewarnaan untuk setiap kasus disusun mengutamakan pewarnaan titik dengan derajat tertinggi (yaitu, w), diikuti oleh titik x_i , y_i , dan z_i , dengan penyesuaian untuk memenuhi syarat pewarnaan *graceful*. Mengutamakan pewarnaan titik dengan derajat tertinggi didasarkan pada kebutuhan untuk mengoptimalkan distribusi warna awal.

Kasus 1: untuk $n = 3$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(Sf_3) \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$ dan pewarnaan sisi yang diinduksi sebagai berikut:



$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2, & v \in \{x_1\} \\ 3, & v \in \{z_1\} \\ 4, & v \in \{x_2\} \\ 5, & v \in \{x_3\} \\ 6, & v \in \{y_1\} \\ 7, & v \in \{y_3\} \\ 8, & v \in \{y_2\} \\ 9, & v \in \{z_2\} \\ 10, & v \in \{z_3\} \end{cases} \quad f(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{wx_1, x_2x_3\} \\ 2, & e \in \{x_1x_2, x_3y_3, wz_1\} \\ 3, & e \in \{wx_2, x_1x_3\} \\ 4, & e \in \{wx_3, x_1y_1, x_2y_2\} \\ 5, & e \in \{wy_1\} \\ 6, & e \in \{wy_3\} \\ 7, & e \in \{wy_2\} \\ 8, & e \in \{wz_2\} \\ 9, & e \in \{wz_3\} \end{cases}$$

Untuk w , $N[w] = \{w, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3\}$ memiliki warna $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 7, 3, 9, 10\}$, semua berbeda. Untuk x_1 , $N[x_1] = \{x_1, w, x_2, x_3, y_1\}$ memiliki warna $\{2, 1, 4, 5, 6\}$, semua berbeda. Verifikasi serupa berlaku untuk titik lain. Untuk sisi yang bertetangga dengan w : $f(wx_1) = |1 - 2| = 1$, $f(wx_2) = |1 - 4| = 3$, $f(wy_1) = |1 - 6| = 5$, dan seterusnya. Semua warna sisi yang bertetangga berbeda.

Kasus 2: untuk $n = 4$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(Sf_4) \rightarrow \{1, 2, \dots, 13\}$ dan pewarnaan sisi yang diinduksi sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2, & v \in \{y_4\} \\ 3, & v \in \{y_3\} \\ 4, & v \in \{y_2\} \\ 5, & v \in \{y_1\} \\ 6, & v \in \{x_1\} \\ 7, & v \in \{x_3\} \\ 8, & v \in \{x_2\} \\ 9, & v \in \{x_4\} \\ 10, & v \in \{z_1\} \\ 11, & v \in \{z_2\} \\ 12, & v \in \{z_3\} \\ 13, & v \in \{z_4\} \end{cases} \quad f(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{wy_4, x_1y_1, x_2x_3\} \\ 2, & e \in \{wy_3, x_1x_2, x_3x_4\} \\ 3, & e \in \{wy_2, x_1x_4\} \\ 4, & e \in \{wy_1, x_2y_2, x_3y_3\} \\ 5, & e \in \{wx_1\} \\ 6, & e \in \{wx_3\} \\ 7, & e \in \{wx_2, x_4y_4\} \\ 8, & e \in \{wy_4\} \\ 9, & e \in \{wz_1\} \\ 10, & e \in \{wz_2\} \\ 11, & e \in \{wz_3\} \\ 12, & e \in \{wz_4\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

Kasus 3: untuk n ganjil, $n \geq 5$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(Sf_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 1\}$ sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2, & v \in \{x_1\} \\ i, & v \in \{x_i, 1 < i \leq n, i \text{ ganjil}\} \\ i + 2, & v \in \{x_i, 1 < i < n, i \text{ genap}\} \\ n + i + 1, & v \in \{y_i, 1 \leq i \leq n\} \\ 2n + i + 1, & v \in \{z_i, 1 \leq i < n\} \\ 3n + 1, & v \in \{z_n\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

Kasus 4: untuk n genap, $n \geq 6$

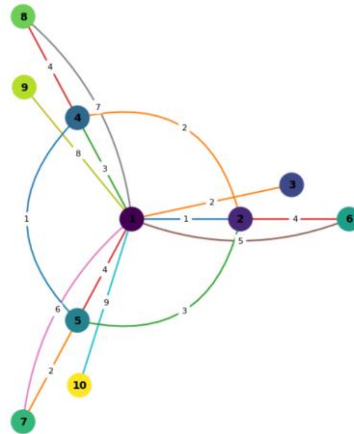
Salah satu pewarnaan titik $f : V(Sf_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 1\}$ sebagai berikut:



$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2, & v \in \{x_1\} \\ i, & v \in \{x_i, 1 < i < n, i \text{ ganjil}\} \\ i + 2, & v \in \{x_i, 1 < i < n, i \text{ genap}\} \\ n + 1, & v \in \{x_n\} \\ n + i, & v \in \{y_i, 1 < i < n - 1\} \\ 2n - 1, & v \in \{y_n\} \\ 2n, & v \in \{y_{n-1}\} \\ 2n + 1, & v \in \{y_1\} \\ 2n + i + 1, & v \in \{z_i, 1 \leq i < n\} \\ 3n + 1, & v \in \{z_n\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

Selain pendekatan analitik manual seperti yang telah diuraikan sebelumnya, pewarnaan *graceful* pada graf Sf_n juga dapat dilakukan melalui implementasi program komputer. Dengan menerapkan algoritma dalam pemrograman, diperoleh solusi pewarnaan graf, sebagaimana ditampilkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Salah Satu Hasil Pewarnaan Graceful Sf_3 dengan Pemrograman

Karena pewarnaan yang diberikan untuk setiap kasus ($n = 3, n = 4, n \geq 5$ ganjil, dan $n \geq 6$ genap) memenuhi batas bawah $\chi_g(Sf_n) \geq 3n + 1$ dari Lemma 1.1 dan batas atas $\chi_g(Sf_n) \leq 3n + 1$ dari konstruksi pewarnaan, maka $\chi_g(Sf_n) = 3n + 1$ untuk $n \geq 3$ terbukti.

Teorema 3.2 Bilangan kromatik *graceful* dari graf kincir angin belanda (D_n^m) untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah $2m + 1$.

Bukti. Graf kincir angin Belanda D_n^m terdiri dari titik pusat w yang terhubung ke titik-titik x_{ij} , di mana i menunjukkan indeks kincir (dari 1 hingga m) dan j menunjukkan posisi titik pada setiap kincir (dari 1 hingga $n - 1$). Himpunan titik graf adalah $V(D_n^m) = \{w\} \cup \{x_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi adalah $E(D_n^m) = \{wx_{ij}; 1 \leq i \leq m, j = 1, n - 1\} \cup \{x_{ij}x_{i(j+1)}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 2\}$. Sehingga, $\Delta(D_n^m) = 2m$ dan $|V(D_n^m)| = mn - m + 1$.

Dari Lemma 1.1 diketahui $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$ untuk graf terhubung. Hal ini karena pewarnaan *graceful* mensyaratkan bahwa setiap titik dan tetangganya memiliki warna yang berbeda, dan titik dengan derajat maksimum $\Delta(G)$ membutuhkan setidaknya $\Delta(G) + 1$ warna, maka bilangan kromatik *graceful* dari graf terhubung selalu memenuhi $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$. Oleh karena itu, batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* graf bunga matahari adalah $\chi_g(D_n^m) \geq 2m + 1$.

Selanjutnya, akan dicari batas atas menggunakan pewarnaan graceful. Dalam mencari batas atas bilangan kromatik graceful untuk graf D_n^m akan dibagi menjadi 6 kasus yaitu $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$, $n \equiv 0(mod\ 3)$ untuk $n \geq 6$, $n \equiv 1(mod\ 3)$ untuk $n \geq 7$, dan $n \equiv 2(mod\ 3)$ untuk $n \geq 8$. Pembagian ini dikarenakan tiga kasus khusus untuk $n = 3, 4, 5$, dan tiga kasus umum untuk $n \geq 6$ berdasarkan sisa pembagian n dengan 3 memiliki pola pewarnaan yang berbeda. Pewarnaan untuk setiap kasus disusun mengutamakan pewarnaan titik dengan derajat tertinggi (yaitu, w), diikuti oleh titik x_{ij} , dengan penyesuaian untuk memenuhi syarat pewarnaan graceful. Setelah memberikan warna pada w yang merupakan titik dengan derajat tertinggi, warnai titik yang bertetangga dengan w yaitu x_{i1} dan $x_{i(n-1)}$ dengan $1 \leq i \leq m$. Kemudian diberikan warna pada titik lainnya pada setiap siklus.

Kasus 1: untuk $n = 3$

Untuk $n = 3$, setiap kincir memiliki $n - 1 = 2$ titik (x_{i1}, x_{i2}). Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_3^m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$ dan pewarnaan sisi yang diinduksi sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2i - 1, & v \in \{x_{i1}, 1 < i \leq m\} \\ 2i, & v \in \{x_{i2}, 1 \leq i \leq m\} \\ 2m + 1, & v \in \{x_{11}\} \end{cases} \quad f(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{x_{i1}x_{i2}, 1 < i \leq m\} \\ 2i - 2, & e \in \{wx_{i1}, 1 < i \leq m\} \\ 2i - 1, & e \in \{wx_{i2}, 1 \leq i \leq m\} \\ 2m - 1, & e \in \{x_{11}x_{12}\} \\ 2m, & e \in \{wx_{11}\} \end{cases}$$

Contoh untuk $m = 4$. Untuk $w, N[w] = \{w, x_{11}, x_{22}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42}\}$ memiliki warna $\{1, 9, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, semua berbeda. Untuk $x_{11}, N[x_{11}] = \{x_{11}, w, x_{12}\}$ memiliki warna $\{9, 1, 2\}$, semua berbeda. Verifikasi serupa berlaku untuk titik lain. Sisi bertetangga dengan w memiliki warna berbeda (8, 1, 2, 3, dan seterusnya), dan sisi dalam kincir tidak bertetangga secara langsung. Untuk sisi yang bertetangga dengan w : $f(wx_1) = |1 - 9| = 8, f(wx_2) = |1 - 2| = 1$, dan seterusnya. Semua warna sisi yang bertetangga berbeda.

Kasus 2: untuk $n = 4$

Untuk $n = 4$, setiap kincir memiliki $n - 1 = 3$ titik (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}). Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_4^m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$ dan pewarnaan sisi yang diinduksi sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2i - 2, & v \in \{x_{i2}, 1 < i \leq m\} \\ 2i - 1, & v \in \{x_{i1}, 1 < i \leq m\} \\ 2i, & v \in \{x_{i3}, 1 \leq i \leq m\} \\ 2m, & v \in \{x_{12}\} \\ 2m + 1, & v \in \{x_{11}\} \end{cases} \quad f(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{x_{i1}x_{i2}, 1 \leq i \leq m\} \\ 2, & e \in \{x_{i2}x_{i3}, 1 < i \leq m\} \\ 2i - 2, & e \in \{wx_{i1}, 1 < i \leq m\} \\ 2i - 1, & e \in \{wx_{i3}, 1 \leq i \leq m\} \\ 2m - 2, & e \in \{x_{12}x_{13}\} \\ 2m, & e \in \{wx_{11}\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat graceful terpenuhi.

Kasus 3: untuk $n = 5$

Untuk $n = 5$, setiap kincir memiliki $n - 1 = 4$ titik ($x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}$).

Kasus 3a: untuk $m = 2$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_5^2) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5\}$ dan pewarnaan sisi yang diinduksi sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2, & v \in \{x_{14}, x_{22}\} \\ 3, & v \in \{x_{12}, x_{21}\} \\ 4, & v \in \{x_{13}, x_{24}\} \\ 5, & v \in \{x_{11}, x_{23}\} \end{cases} \quad f(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{wx_{14}, x_{12}x_{13}, x_{21}x_{22}, x_{23}x_{24}\} \\ 2, & e \in \{wx_{21}, x_{11}x_{21}, x_{13}x_{14}\} \\ 3, & e \in \{wx_{24}, x_{22}x_{23}\} \\ 4, & e \in \{wx_{11}\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat graceful terpenuhi.



Kasus 3b: untuk $m > 2$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_5^m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$ sebagai:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w\} \\ 2i - 3, & v \in \{x_{i2}, 2 < i \leq m\} \\ 2i - 2, & v \in \{x_{i3}, 1 < i \leq m\} \\ 2i - 1, & v \in \{x_{i1}, 1 < i \leq m\} \\ 2i, & v \in \{x_{i4}, 1 \leq i \leq m\} \\ 2m - 1, & v \in \{x_{12}\} \\ 2m, & v \in \{x_{13}\} \\ 2m + 1, & v \in \{x_{11}, x_{22}\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

Kasus 4: untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3), n \geq 6$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_n^m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$ sebagai:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w; x_{ij}, 1 \leq i \leq m, j \equiv 0(\text{mod } 3), 3 \leq j < n\} \\ 2i - 1, & v \in \{x_{ij}, 1 < i \leq m, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n\} \\ 2i, & v \in \{x_{ij}, 1 \leq i \leq m, j \equiv 2(\text{mod } 3), 2 \leq j < n\} \\ 2m + 1, & v \in \{x_{1j}, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

Kasus 5: untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3), n \geq 7$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_n^m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$ sebagai:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w; x_{ij}, 1 \leq i \leq m, j \equiv 0(\text{mod } 3), 3 \leq j < n - 1\} \\ 2i - 2, & v \in \{x_{i(n-2)}, 1 < i \leq m\} \\ 2i - 1, & v \in \{x_{ij}, 1 < i \leq m, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n\} \\ 2i, & v \in \{x_{i(n-1)}, 1 \leq i \leq m; x_{ij}, 1 \leq i \leq m, j \equiv 2(\text{mod } 3), 2 \leq j < n - 2\} \\ 2m, & v \in \{x_{1(n-2)}\} \\ 2m + 1, & v \in \{x_{1j}, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

Kasus 6: untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3), n \geq 8$

Kasus 6a: untuk $m = 2$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_n^2) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5\}$ sebagai:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w; x_{ij}, 1 \leq i \leq 2, j \equiv 0(\text{mod } 3), 3 \leq j < n - 2\} \\ 2, & v \in \{x_{1(n-1)}; x_{1j}, j \equiv 2(\text{mod } 3), 2 \leq j < n - 3; x_{2(n-3)}\} \\ 3, & v \in \{x_{2j}, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n - 3; x_{1(n-3)}\} \\ 4, & v \in \{x_{1(n-2)}; x_{2(n-1)}; x_{2j}, j \equiv 2(\text{mod } 3), 2 \leq j < n - 3\} \\ 5, & v \in \{x_{1j}, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n - 3; x_{2(n-2)}\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

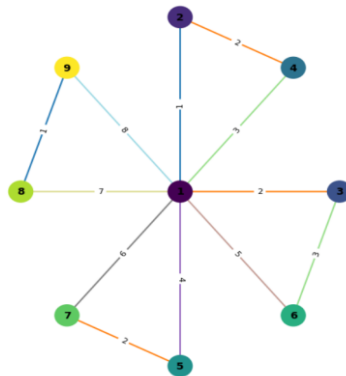
Kasus 6b: untuk $m > 2$

Salah satu pewarnaan titik $f : V(D_n^m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$ sebagai:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{w; x_{ij}, 1 \leq i \leq m, j \equiv 0(\text{mod } 3), 3 \leq j < n-2\} \\ 2i-3, & v \in \{x_{i(n-3)}, 2 < i \leq m\} \\ 2i-2, & v \in \{x_{i(n-2)}, 1 < i \leq m\} \\ 2i-1, & v \in \{x_{ij}, 1 < i \leq m, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n-1\} \\ 2i, & v \in \{x_{i(n-1)}, 1 \leq i \leq m; x_{ij}, 1 \leq i \leq m, j \equiv 2(\text{mod } 3), 2 \leq j < n-3\} \\ 2m-1, & v \in \{x_{1(n-3)}\} \\ 2m, & v \in \{x_{1(n-2)}\} \\ 2m+1, & v \in \{x_{2(n-3)}; x_{1j}, j \equiv 1(\text{mod } 3), 1 \leq j < n-1\} \end{cases}$$

Verifikasi serupa dengan kasus 1 dapat dilakukan dengan memastikan semua syarat *graceful* terpenuhi.

Selain menggunakan pendekatan analitik secara manual seperti yang telah diuraikan sebelumnya, pewarnaan *graceful* pada graf D_n^m juga dapat dilakukan melalui implementasi program komputer. Dengan menerapkan algoritma dalam pemrograman, diperoleh solusi untuk pewarnaan graf yang ditampilkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Salah Satu Hasil Pewarnaan Graceful D_3^4 dengan Pemrograman

Karena pewarnaan yang diberikan untuk setiap kasus ($n = 3$, $n = 4$, $n = 6$, $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ untuk $n \geq 6$, $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ untuk $n \geq 7$, dan $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ untuk $n \geq 8$) memenuhi batas bawah $\chi_g(D_n^m) \geq 2m + 1$ dari Lemma 1.1 dan batas atas $\chi_g(D_n^m) \leq 2m + 1$ dari konstruksi pewarnaan, maka $\chi_g(D_n^m) = 2m + 1$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ terbukti.

D. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf bunga matahari (Sf_n) adalah $\chi_g(Sf_n) = 3n + 1$ dan bilangan kromatik *graceful* pada graf kincir angin belanda (D_n^m) untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 4$ adalah $\chi_g(D_n^m) = 2m + 1$. Namun, beberapa graf masih belum ditemukan nilai dari bilangan kromatik *graceful*-nya dan sulit untuk menemukan generalisasi rumusnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Annadhifi, M. I. N., Adawiyah, R., Dafik, D., & Suparta, I. N. (2024). Rainbow Vertex Connection Number Of Bull Graph, Net Graph, Triangular Ladder Graph, And Composition Graph ($P_n [P_1]$). *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(3), 1665–1672. <https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss3pp1665-1672>



- Budayana, I. N., Suparta, I. N., & Purnamayanti, N. P. H. (2018). Graceful labeling for open superstar of complete bipartite graphs $S_2(t \cdot Km, n)$. *Journal of Physics: Conference Series*, 1040(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1040/1/012020>
- Byers, A. D. (2018). *ScholarWorks at WMU Graceful Colorings and Connection in Graphs Graceful Colorings and Connection in Graphs* by.
- Dwi, D., Lestari, A., Kristiana, A. I., Prihandini, R. M., Alfarisi, R., Setiawan, T. B., & Adawiyah, R. (2024). Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Sentripetal. *J. DIFERENSIAL*, 6(1), 57–64.
- Firdausy, A. N., Dewi, P. K., Sudiarta, I. G. P., & Silalahi, R. Y. (2021). Math Unesa. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 9(2), 437–446. <https://media.neliti.com/media/publications/249234-model-infeksi-hiv-dengan-pengaruh-percoba-b7e3cd43.pdf>
- Firman, F., Dafik, D., & Albirri, E. R. (2022). Rainbow Vertex Connection Number pada Keluarga Graf Roda. *Cgant Journal of Mathematics and Applications*, 3(1), 1–10. <https://doi.org/10.25037/cgantjma.v3i1.71>
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(25), 4–623. <https://doi.org/10.37236/11668>
- Javaid, M., Siddique, M. K., & Ali, U. (2021). Computational Journal of Combinatorial Mathematics Novel Connection Based Zagreb Indices of Dendrimer Nanostars. *Comp. J. Combin. Math*, 3(September 2021), 42–51. www.cojgco.com
- Khoirunnisa, S., Dafik, Kristiana, A. I., & Alfarisi, R. (2021). Graceful Coloring of Wheel Graph Family. *International Journal of Academic and Applied Research (IJAAR)*, 5(4), 68–78.
- Kristiana, A. I., Anzori, Adawiyah, R., Slamini, & Albirri, E. R. (2023). Graceful Chromatic Number on Grid Graph Family. *Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran*, 8(2), 144 – 155.
- Suparta, I. N., & Ariawan, I. D. M. A. (2020). Expanding graceful trees. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 8(2), 217–232. <https://doi.org/10.5614/ejgta.2020.8.2.2>
- Suparta, I. N., Dwi Novitarisa, A. A. A., & Suharta, G. P. (2022). *Graceful Labeling of Some Join Graphs*. 06(02), 129–144.
- Suparta, I. N., Lin, Y., Hasni, R., & Budayana, I. N. (2025). On odd-graceful coloring of graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, 10(2), 335–354. <https://doi.org/10.22049/CCO.2023.28736.1692>
- Suparta, I. N., Venkathacalam, M., Gunadi, I. G. A., & Pratama, P. A. C. (2023). Graceful Chromatic Number of Some Cartesian Product Graphs. *Ural Mathematical Journal*, 9(2), 193–208. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.016>
- Utomo, R. B. (2024). Pewarnaan Graf Dengan Algoritma Welch-Powell Untuk Pengaturan Lampu Lalu Lintas Persimpangan Tugu Adipura Kota Tangerang. *Buana Matematika: Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, 14, 131–144.

