Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

PENERAPAN MODEL LOGISTIK VERHULST UNTUK ESTIMASI JUMLAH PENDUDUK DI KOTA MAKASSAR DENGAN METODE ADAM BASHFORTH-MOULTON

Ahmad Zaki[1], Wafi Bintang Ramadhani[2], Irwan[3], Muh. Isbar Pratama[4]
Jurusan Matematika Universitas Negeri Makassar[1,2,3,4]
Email: ahmadzaki@unm.ac.id[1], irwanthaha@unm.ac.id[3], isbarpratama@unm.ac.id[4]

Corresponding author: Irwan, **Email.** irwanthaha@unm.ac.id

Abstrak. Penelitian ini menerapkan metode Adam Bashforth-Moulton untuk menentukan solusi model Logistik Verhulst. Bentuk solusi yang diperoleh adalah estimasi jumlah penduduk di Kota Makassar tahun 2025 samapai tahun 2027 dengan menggunakan persamaan $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$. Model Logistik Verhulst adalah suatu model matematika yang digunakan untuk memodelkan pertumbuhan populasi yang terbatas oleh daya dukung lingkungan (carrying capacity). Model ini menggambarkan laju pertumbuhan yang awalnya eksponensial namun melambat seiring bertambahnya populasi hingga akhirnya mencapai keadaan stabil. Persamaan model Verhulst terlebih dahulu diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat untuk mendapatkan solusi awal $N_1 = 1.424.696{,}9804$; $N_2 = 1.428.435{,}7924$; dan $N_3 = 1.433.001{,}8611$. Selanjutnya nilai awal disubstitusi ke persamaan Adam Bashforth Orde Empat untuk mendapatkan nilai prediksi, kemudian nilai prediksi yang diperoleh diperbaiki menggunakan persamaan korektor Adam Moulton Orde Empat. Pada tahun 2029 diperoleh nilai prediktor $N_9^P = 1.443.255{,}564$ dan nilai korektor $N_9^C = 1.443.259{,}703$ sehingga estimasi jumlah penduduk di Kota Makassar pada tahun 2029 dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton saat $n = 9$ adalah $N = 1.443.259{,}703$ jiwa.

Kata Kunci: **Model Logistik Verhulst, Metode Runge-Kutta, Metode Bashforth-Moulton.**

Abstract. This study applies the Adam-Bashforth-Moulton method to determine the solution of the Verhulst model. The resulting solution provides an estimate of the population in Makassar City from 2025 to 2027 using the equation $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$. The Verhulst Logistic model is a mathematical model used to describe population growth that is limited by environmental carrying capacity. It represents a growth rate that is initially exponential but gradually slows down as the population increases, eventually reaching a stable state. The Verhulst model equation is first solved using the Fourth-Order Runge-Kutta method to obtain initial solutions $N_1 = 1.424.696{,}9804$; $N_2 = 1.428.435{,}7924$; and $N_3 = 1.433.001{,}8611$. These initial values are then substituted into the Fourth-Order Adam-Bashforth equation to obtain a predicted value, which is subsequently refined using the Fourth-Order Adam-Moulton corrector equation. For the year 2029, the predicted value obtained is $N_9^P = 1.443.255{,}564$ and the corrected value is $N_9^C = 1.443.259{,}703$. Thus, the estimated population of Makassar City in 2029 using the Adam-Bashforth-Moulton method at $n = 9$ is $N = 1.443.259{,}703$ people.

Keywords: **Logistic Verhulst Model, Runge-Kutta Method, Bashforth-Moulton Method.**

A. Pendahuluan

Dalam konteks perencanaan demografi, model matematika digunakan untuk memahami dan memprediksi pertumbuhan penduduk. Model eksponensial dan model logistik merupakan dua pendekatan yang umum digunakan. Model eksponensial mengasumsikan pertumbuhan tanpa batas, namun model ini seringkali tidak realistis karena mengabaikan keterbatasan sumber daya. Sebaliknya, model logistik Verhulst lebih relevan untuk populasi manusia, sebab mempertimbangkan daya dukung lingkungan (Sulma & Nursamsi, 2023).

Model matematika yang dapat digunakan untuk memprediksi pertumbuhan populasi penduduk salah satunya adalah model Verhulst. Pertumbuhan penduduk merupakan proses yang berkesinambungan. Model pertumbuhan penduduk yang berkesinambungan yaitu model populasi logistik dan model populasi eksponensial (Suryani dkk., 2023). Model pertumbuhan logistik merupakan suatu model yang menggunakan faktor logistik yaitu faktor makanan dan faktor ruang hidup, dimana pada saat tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan apabila jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama. Jumlah populasi pada model logistik Verhulst dipengaruhi oleh daya tampung (*carrying capacity*) populasi suatu daerah, jumlah populasi awal, dan laju pertumbuhan. Laju pertumbuhan populasi terbatas karena ketersediaan makanan, dan sumber hidup lainnya, sehingga jumlah populasi dengan model logistik akan selalu terbatas pada suatu nilai tertentu (Laurentina dkk., 2023).

Model logisik merupakan model dalam bentuk persamaan diferensial non-linear yang menggambarkan pertumbuhan populasi. Pertumbuhan populasi merupakan suatu proses yang bersifat kontinu. Suatu persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan cara analitik atau secara numerik. Sulit menemukan solusi dari persamaan diferensial nonlinear secara analitik, sehingga penyelesaian secara numerik dapat digunakan untuk memperoleh solusi persamaan diferensial nonlinear tersebut. Solusi yang diperoleh dari metode numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan dari solusi analitiknya, sehingga solusi numerik tersebut memuat nilai kesalahan. Namun, penyelesaian model ini secara analitik kerap tidak memungkinkan untuk jangka waktu panjang dan data dinamis. Oleh karena itu, diperlukan metode numerik yang akurat dan stabil, salah satunya adalah metode prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton (Side dkk., 2020).

Metode Adams-Bashforth-Moulton merupakan teknik numerik dua tahap yang mengombinasikan pendekatan eksplisit dan implisit. Pada tahap awal, metode ini memprediksi solusi dengan pendekatan eksplisit, kemudian mengoreksi hasil prediksi menggunakan pendekatan implisit, sehingga diperoleh akurasi yang lebih tinggi. Pendekatan ini sangat sesuai diterapkan pada model non-linear seperti model logistik Verhulst, terutama karena kestabilan dan presisi sangat penting dalam proyeksi jangka panjang.

Indonesia yang menempati urutan keempat penduduk terbesar di dunia, menghadapi tantangan demografi yang semakin kompleks. Berdasarkan data BPS (2023), populasi Indonesia telah mencapai lebih dari 278 juta jiwa, dengan laju pertumbuhan tahunan sekitar 1,17%. Pertumbuhan ini tidak terdistribusi secara merata, kota-kota besar seperti Makassar memperlihatkan pertumbuhan penduduk yang jauh lebih tinggi dibandingkan wilayah pedesaan. Urbanisasi yang terjadi di Makassar, misalnya, didorong oleh migrasi demi peluang ekonomi dan akses layanan sosial yang lebih baik, sehingga kota tersebut menjadi pusat pertumbuhan demografis di kawasan timur Indonesia. Jumlah penduduk dapat mempengaruhi perekonomian suatu daerah. Permasalahan itu terjadi karena pertumbuhan penduduk yang tidak terkendali dapat mengakibatkan tidak tercapainya tujuan pembangunan ekonomi, yaitu kesejahteraan rakyat serta mempengaruhu angka kemiskinan (Berliani, 2021).

Dalam dua dekade terakhir, dilihat dari data BPS Kota Makassar, penduduk Kota Makassar meningkat signifikan, dari sekitar 1.194.000 jiwa pada tahun 2010 menjadi kurang lebih 1.474.000 jiwa pada 2023. Lonjakan ini dipicu oleh migrasi, pertumbuhan alami, serta perkembangan ekonomi yang menciptakan lapangan kerja baru. Akibatnya, terjadi tekanan terhadap kapasitas tata ruang, infrastruktur, dan lingkungan, sehingga perencanaan berbasis data serta proyeksi yang presisi menjadi kebutuhan mendesak.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengestimasi jumlah penduduk di Kota Makassar dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat.

1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari fungsi yang tidak diketahui yang juga melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap

https://doi.org/10.30605/proximal.v9i1.7327
Volume 9 Nomor 1, Tahun 2026

variabel-variabel bebas. Bentuk persamaan diferensial memiliki dua bentuk, yaitu Persamaan Diferensial Biasa dan Persamaan Diferensial Parsial. Persamaan diferensial Biasa adalah suatu persamaan diferensial yang hanya mengandung satu variabel bebas. Jika *y(x)* adalah suatu fungsi dengan satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas. Persamaan Diferensial Parsial adalah suatu persamaan diferensial yang mempunyai dua atau lebih variabel bebas. Orde persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan. Derajat dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial. Persamaan diferensial orde-n dapat ditulis dalam bentuk: (Neswan, 2016)

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Dengan $y^{(n)}$ melambangkan turunan ke-n dari y terhadap x.
Persamaan diferensial orde-n dikatakan linear bila ditulis dalam bentuk:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = F(x)\,; a_0(x) \neq 0$$

Persamaan diferensial biasa orede-n dikatakan linear jika fungsi tersebut linear pada variabel terikat dan juga turunan-turunannya. Jika $f(x) = 0$, maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial homogen atau persamaan diferensial tereduksi. Jika $f(x) \neq 0$, maka disebut sebagai persamaan diferensial lengkap atau persamaan diferensial non-homogen. Jika $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ adalah konstanta, maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linear koefisien konstanta, sedangkan jika $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ bukan merupakan kosntanta, maka disebut persamaan diferensial linear koefisien variabel. (Neswan, 2016)
Misalkan sistem persamaan diferensial biasa dinyatakan dalam bentuk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} f(t, x) \tag{1}$$

Dengan $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ dan $f(t,x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix}$ adalah fungsi tak linear dalam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Sistem persamaan pada persamaan (1) merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear (Side dkk., 2019).

2. Model Logistik Verhulst

Model Logistik Verhulst pertama kali diperkenalkan pada tahun 1838 oleh Pierre Francois Verhulst yang merupakan seorang matematikawan dan juga ahli dalam bidang Biologi yang berkebangsaan Belanda. Model pertumbuhan alami tidak cukup tepat untuk populasi yang cukup besar dan juga tempat yang terbatas, sehingga timbul hambatan karena banyaknya populasi akan mengurangi populasi itu sendiri. Perubahan jumlah populasi setiap waktu merupakan salah satu penanda terjadinya pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh jumlah kelahiran, kematian, dan migrasi. Salah satu model pertumbuhan adalah model pertumbuhan kontinu khususnya model logistik atau verhulst. Model ini merupakan pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial yang dibahas sebelumnya yang pertama kali dicetuskan oleh Maltus. Pada model pertumbuhan logistik Verhulst, diasumsikan bahwa rata-rata total pertumbuhan tergantung pada ukuran populasi atau sama dengan laju pertumbuhan perkapita. Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan sumber daya manusia dan ruang hidup. (Anggreini, 2018).

Persamaan logistik disusun berdasarkan asumsi-asumsi yang diantaranya berupa populasi akan menyeimbangkan hidupnya dengan lingkungannya sehingga memiliki sebaran umur stabil. Populasi memiliki laju pertumbuhan yang secara berangsur-angsur menurun secara tetap dengan konstanta r. Sepanjang waktu pertumbuhan keadaan lingkungan tidak berubah. Model logistik verhulst digunakan karena pada kenyataannya populasi bergantung pada kerapatannya, sehingga laju kelahiran dan laju kematian tidak konstan. Bentuk yang paling sederhana untuk laju pertumbuhan relatif yang mengakomodasikan asumsi ini adalah: (Anggreini, 2018b)

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2)$$

Kedua ruas dikalikan dengan N, maka diperoleh model untuk pertumbuhan populasi yang biasa disebut dengan persamaan diferensial logistik, yaitu sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (3)$$

Kapasitas tampung didapatkan dengan menggunakan luas daerah, yaitu digunakan cara sebagai berikut: (Raming et al., 2024)

$$K = \frac{Luas\ daerah}{Luas\ tempat\ tinggal\ minimum\ tiap\ individu}$$

Jika N kecil dibandingkan dengan K pada persamaan (3), maka $\frac{N}{K}$ mendekati 0 dan $\frac{dN}{dt} \approx rN$. Namun, jika $N \to K$ (populasi mendekati kapasitas tampungnya), maka $\frac{N}{K} \to 1$ sehingga $\frac{dN}{dt} \to 1$. Jika populasi N berada di antara 0 dan K $(0 < N < K)$, maka ruas kanan persamaan di atas bernilai positif, sehingga $\frac{dN}{dt} \to 1$ dan populasi naik. Tetapi jika populasi melampaui kapasitas tampungnya $(N > K)$, maka $1 - \frac{N}{K}$ bernilai negatif, sehingga $\frac{dN}{dt} < 0$ dan populasi turun (Sari dkk., 2024).

3. Metode Runge-Kutta Orde Empat

Salah satu metode penyelesaian persamaan diferensial secara numerik ialah dengan menggunakan Metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta Orede Empat ditemukan oleh Carl Runge dan Wilhelm Kutta yang merupakan matematikawan asal Jerman. Metode Runge-Kutta Orde Empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial karena termasuk metode yang paling teliti dibandingkan dengan Metode Runge-Kutta orde yang lebih rendah juga suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan nilai awal pada persamaan diferensial linier ataupun non-linear. Dasar pemikiran dari metode ini adalah untuk mempertahankan hampiran Taylor, tetapi untuk penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode Taylor tidak praktis karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$. Tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama fungsi yang bentuknya ruymit. Semakin tinggi orede metode deret Taylor maka semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah

$$x_{i+1} = x_i + \Phi(t_i, x_i, h)h$$

Dengan $\Phi(t_i, x_i, h)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi nilai lama x_i ke nilai baru x_{i+1} sepanjang interval h. Bentuk persamaan Metode Runge-Kutta Orde Empat adalah sebagai berikut (Elektro, 2014).

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Dalam hal ini k adalah:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_1 + k_3h)$$

https://doi.org/10.30605/proximal.v9i1.7327

4. Metode Adam Bashfort-Moulton

Metode Adam Bashforth-Moulton (ABM) merupakan cara mencari solusi numerik pada titik tertentu dari suatu persamaan diferensial nonlinear dengan nilai awal yang telah diketahui Metode Adam Bashforth-Moulton termasuk kedalam metode *multi-step*. Metode *multi-step* disebut juga sebagai metode-prediktor-korektor karena dalam penyelesaiannya menggunakan persamaan predictor dan persamaan korektor tanpa mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu. Persamaan prediktor-korektor terdiri dari metode Adam Bashforth sebagai prediktor dan metode Adam Moulton sebagai korektor. Persamaan prediktor atau persamaan pertama digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama untuk N_{n+1}), sedangkan persamaan korektor atau persamaan kedua digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi. Metode *multi-step* yang paling terkenal adalah metode Adam Boshforth-Moulton Orde Empat. Galat pada metode Adam Boshforth-Moulton Orde Empat lebih kecil daripada galat metode Adam Boshforth-Moulton Orde Tiga dan Orde Dua sehingga dapat memberikan solusi yang cukup akurat. Untuk memperoleh solusi metode *multi-step* memerlukan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode *one-step* seperti metode Euler, metode Heum, metode Deret Taylor, dan metode Runge-Kutta (Raming dkk, 2024).

Rumus prediktor Adam Bashforth-Moulton Orde Empat:

$$y_{n+1}^{p} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9_{n-3})$$

Rumus korektor Adam Bashforth-Moulton Orde Empat:

$$y_{n+1}^{c} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

B. Metodologi Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian terapan, yaitu penerapan model logistik Verhulst menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat dan Adam Bashfort-Moulton dengan terlebih dahulu menerapkan konsep-konsep untuk menyelesaikan masalah atau memberikan solusi. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu mengumpulkan data jumlah penduduk Kota Makassar yang diambil dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Makassar kemudian mencari solusi awal atau nilai awal model Logistik Verhulst dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat. Setelah mendapatkan solusi awal maka dicari solusi numerik menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat dengan menggunakan aplikasi MAPLE. Kemudian menginterpretasikan hasil perhitungan dan mengambil kesimpulan.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

1. Data Penduduk Kota Makassar

Dalam penelitian ini, data jumlah penduduk yang digunakan adalah data jumlah penduduk hasil sensus penduduk di Kota Makassar dari tahun 2020 sampai tahun 2024 yang bersumber dari BPS Kota Makassar. Berikut ini adalah tabel 2 yang menyatakan jumlah penduduk di Kota Makassar dari tahun 2020-2024:

Tabel 1 Data Jumlah Penduduk Kota Makassar

Tahun	Jumlah Penduduk (Jiwa)
2020	1.423.877
2021	1.427.619
2022	1.432.189
2023	1.474.393
2024	1.477.861

2. Persamaan Logistik Verhulst

Untuk mencari solusi awal dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat dan persamaan yang digunakan adalah model persamaan logistik verhulst seperti pada persamaan (2.3). Laju pertumbuhan penduduk ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut.

$$P = P_0 e^{rt}$$
$$r = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$
$$r = \frac{1}{1}\ln\left(\frac{1.427.619}{1.423.877}\right) \approx 0{,}002$$

Dengan menggunakan rumus mencari kapasitas tampung (*carrying capacity*) maka diperoleh nilai K sebagai berikut.

$$K = \frac{Luas\ daerah}{Luas\ tempat\ tinggal\ minimum\ tiap\ individu}$$
$$= \frac{175.770.000\ m^2}{80\ m^2}$$
$$= 2.197.125$$

Berdasarkan perhitungan di atas, maka diambil kapasitas tampung penduduk Kota Makassar yaitu K = 2.000.000.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$
$$\frac{dN}{dt} = 0{,}002N\left(1 - \frac{N}{2.000.000}\right) \quad (4)$$

Persamaan (4) diguakan untuk mencari solusi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat dan metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat.

3. Solusi Awal Model Verhulst Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

Mencari solusi awal N_0, N_1, N_2, N_3 menggunakan metode Runge Kutta Orde Empat dengan ukuran langkah $h = 1$ yang dimulai dari N_{n+1} dimana $n = 0,1,2,3$ dan nilai $N_0 = 1.423.877$, sehingga diperoleh nilai-nilai k dengan menggunakan perhitungan dari persamaan (4) berikut.

Tabel 2 Nilai-nilai k

n	k_1	k_2	k_3	k_4
0	820,3283	819,9804	819,9805	819,6325
1	817,1419	816,7924	816,7925	816,4428
2	813,2127	812,8610	812,8612	812,5094

Setelah mendapatkan nilai-nilai k maka dapat dicari solusi awal yaitu N_1, N_2, dan N_3 yang akan digunakan pada metode Adam-Bashforth Moulton Orde Empat.

Tabel 3 Solusi Awal Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

n	t_n	$h = 1$	
		N_n	$f(t,N) = 0{,}002N\left(1 - \frac{N}{2.000.000}\right)$
0	1	1.423.877	820,3283
1	2	1.424.696,9804	817,1419
2	3	1.428.435,7924	813,2127
3	4	1.433.001,8611	774,9513

Tabel 3 menyajikan hasil estimasi jumlah penduduk menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat dengan langkah $h = 1$, berdasarkan model Logistik Verhulst $f(t,N) = 0{,}002N\left(1 - \frac{N}{2.000.000}\right)$. Pada tahun awal $t_0 = 1$, populasi awal adalah 1.423.877. Selanjutnya, estimasi jumlah penduduk meningkat menjadi 1.424.696,9804 jiwa pada tahun kedua. Pada tahun ketiga dan keempat, populasi diperkirakan mencapai masing-masing 1.428.435,7924 dan 1.433.001,8611 jiwa. Penurunan nilai laju pertumbuhan ini sejalan dengan sifat dasar model logistik, di mana pertumbuhan populasi akan melambat seiring populasi mendekati kapasitas maksimum lingkungan (*carrying capacity*), yaitu 2.000.000 jiwa. Hal ini mencerminkan dinamika pertumbuhan yang realistis, di mana faktor pembatas mulai berpengaruh signifikan terhadap peningkatan jumlah penduduk.

4. Solusi Model Verhulst Menggunakan Metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat

Setelah diperoleh solusi awal, selanjutnya dicari solusi numerik yang merupakan estimasi hasil panen padi menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat. Berikut merupakan solusi numerik dengan menggunakan bantuan *software* MAPLE.

Tabel 4 Solusi Numerik Model Verhulst menggunakan Metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat

n	t_n	$h = 1$		Galat Relatif
		N_n^P	N_n^C	
0	1		1.423.877	
1	2		1.424.696,9804	
2	3		1.428.435,7924	
3	4		1.433.001,8611	
4	5	1.433.728,600	1.433.783,694	$3.84256009 \times 10^{-5}$
5	6	1.454.628,844	1.441.484,945	$9.118304735 \times 10^{-3}$
6	7	1.420.847,563	1.440.486,603	$1.363361517 \times 10^{-2}$
7	8	1.454.711,475	1.441.648,674	$9.061015513 \times 10^{-3}$
8	9	1.439.200,709	1.442.455,497	$2.25642178 \times 10^{-3}$
9	10	1.443.255,564	1.443.259,703	$2.867813735 \times 10^{-6}$

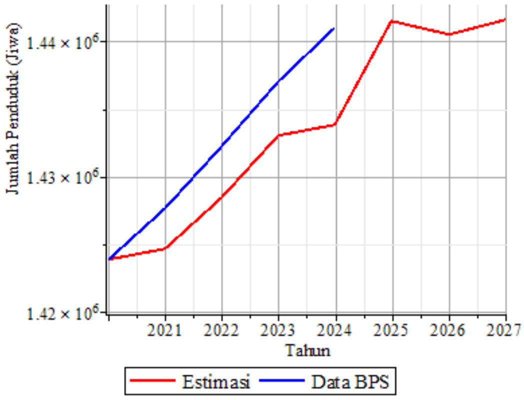
Pada Tabel 3 menunjukkan hasil solusi numerik dari model Logistik Verhulst yang dihitung menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat dimana galat relatif lebih kecil dari kriteria pemberhentian 5×10^{-5}. Dari perhitungan tersebut, persamaan logistik Verhulst ukuran langkah $h = 1$ yang berarti data diambil setiap satu tahun sekali. Nilai-nilai populasi pada setiap langkah waktu t_n diperoleh melalui dua tahapan, yaitu mencari nilai prediktor menggunakan metode Adam-Bashforth kemudian mencari nilai korektor menggunakan metode Adam-Moulton yang dimulai dari $n = 4$. Pada saat $n = 4$, nilai galat relatif antara prediksi dan koreksi sangat kecil yaitu sekitar $3.84256009 \times 10^{-5}$, menunjukkan bahwa metode bekerja dengan stabil dan menghasilkan nilai yang akurat. Puncaknya terjadi pada $n = 6$ dengan galat sekitar $1.363361517 \times 10^{-2}$ yang menunjukkan adanya ketidakstabilan lokal atau perubahan cepat dalam dinamika populasi. Meskipun demikian, pada langkah $n = 9$ galat relatif kembali menurun secara drastis hingga mencapai $2.867813735 \times 10^{-6}$, mengindikasikan bahwa metode kembali stabil dan solusi numerik yang dihasilkan semakin mendekati nilai sebenarnya.

Tabel 5 Estimasi Jumlah Penduduk Di Kota Makassar

n	tahun	N_n	Data BPS (Jiwa)
0	2020	1.423.877	1.423.877
1	2021	1.424.696,9804	1.427.619
2	2022	1.428.435,7924	1.432.189
3	2023	1.433.001,8611	1.474.393
4	2024	1.433.783,694	1.477.861
5	2025	1.441.484,945	
6	2026	1.440.486,603	
7	2027	1.441.648,674	
8	2028	1.442.455,497	
9	2029	1.443.259,703	

Pada Tabel 4 menunjukkan estimasi jumlah penduduk di kota makassar dari tahun 2020 sampai tahun 2029 menggunakan metode numerik dengan langkah $h = 1$, serta membandingkannya dengan data yang diperoleh dari BPS Kota Makassar untuk tahun 2020 sampai tahun 2024. Pada tahun 2020 nilai estimasi awal dan data BPS memiliki nilai yang sama, karena digunakan sebagai nilai awal model. Tahun-tahun berikutnya menunjukkan bahwa estimasi model mendekati data BPS, seperti pada tahun 2021 dan 2022, di mana hasil model masing-masing adalah 1.424.697 dan 1.428.436 jiwa, sementara data BPS mencatat 1.427.619 dan 1.432.189 jiwa. Perbedaan mulai terlihat lebih besar pada tahun 2023, ketika data BPS menunjukkan lonjakan menjadi 1.474.393 jiwa, sedangkan hasil model hanya 1.433.001 jiwa. Meskipun terdapat penyimpangan, tren model tetap menunjukkan pertumbuhan yang konsisten. Mulai tahun 2024, estimasi lanjutan dilakukan hingga tahun 2029. Hasil menunjukkan bahwa laju pertumbuhan penduduk cenderung melambat dan mendekati nilai stabil, yang tercermin dari perubahan yang semakin kecil antar tahun.

Dapat dilihat perbandingan antara data primer jumlah penduduk dan data empiris solusi model Verhulst menggunakan metode Adam Bashfort-Moulton melalui grafik berikut.



Gambar 1 Grafik perbandingan

Grafik perbandingan antara data empiris dan hasil estimasi dengan model Verhulst memperlihatkan adanya perbedaan pola pertumbuhan penduduk. Data empiris (ditunjukkan dengan simbol merah) menunjukkan peningkatan yang cukup tajam pada periode 2023 sampai 2024, dimana jumlah penduduk bertambah dari sekitar 1,43 juta jiwa menjadi lebih dari 1,47 juta jiwa. Sementara itu, hasil estimasi model Verhulst (ditampilkan dengan garis biru) menggambarkan pertumbuhan yang lebih stabil dan cenderung melandai, tanpa adanya lonjakan signifikan pada periode yang sama. Hal ini menunjukkan bahwa model Verhulst mampu merepresentasikan pola pertumbuhan logistik, yaitu pertumbuhan yang meningkat secara bertahap menuju kondisi jenuh, namun belum sepenuhnya dapat menangkap dinamika pertumbuhan penduduk yang bersifat berubah-ubah. Dengan demikian, meskipun model Verhulst dapat digunakan untuk memperoleh gambaran umum mengenai tren pertumbuhan penduduk, perbedaan antara hasil estimasi dan data aktual tetap muncul, terutama ketika terdapat faktor eksternal atau perubahan sosial-ekonomi yang menyebabkan penyimpangan dari pola logistik ideal.

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, maka dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu estimasi jumlah penduduk di Kota Makassar dengan melihat nilai korektor yaitu, pada tahun 2025 sebanyak 1.441.484,945 jiwa, tahun 2026 sebanyak 1.440.486,603 jiwa, tahun 2027 sebanyak 1.441.648,674 jiwa, tahun 2028 sebanyak 1.442.455,497 jiwa, dan tahun 2029 sebanyak 1.443.259,703 jiwa.

DAFTAR PUSTAKA

Adolph, R. (2016). *Implementasi Phyton pada Metode Numerik*. *Journal of Mathematics,* 1–23.

Ainy, H., Nurrochmah, S., & Katmawanti, S. (2019). Hubungan Antara Fertilitas, Mortalitas, Dan Migrasi Dengan Laju Pertumbuhan Penduduk. *Preventia: The Indonesian Journal of Public Health*, *4*(1), 15. https://doi.org/10.17977/um044v4i1p15-22

Anggreini, D. (2018). Penerapan Persamaan Diferensial Verhulst dalam Menentukan Proyeksi Penduduk di Kabupaten Tulungagung. *Jurnal Fourier*, *7*(2), 87–102.

Auerbach, J. (2021). The logistic function : The law of population growth. *Journal of Mathematics, Computations and Statistics*, *7*(1), 27.

Berliani, K. (2021). Pengaruh Tingkat Pengangguran, Tingkat Pendidikan dan Laju Pertumbuhan Penduduk Terhadap Tingkat Kemiskinan Penduduk Provinsi Jawa Barat Tahun 2015-2020. *Syntax Literate ; Jurnal Ilmiah Indonesia*, *6*(2), 872. https://doi.org/10.36418/syntax-literate.v6i2.2244

Br Nasution, F., Cintya, D., Br Pohan, H., Dita, R. P., & Marpaung, R. A. (2025). *Penerapan Metode Adams Bashforth Moulton melalui Persamaan Logistik dalam Memprediksi Jumlah Penduduk di Kota Medan*.

Doli Nasution, M., Nasution, E., & Haryati, F. (2017). Pengembangan Bahan Ajar Metode Numerik Dengan Pendekatan Metakognitif Berbantuan MATLAB. *Pendidikan Matematika*, *6*, 1–6.

Elektro, J. (2014). Penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4 dalam Analisis Rangkaian RLC Rika Favoria Gusa. *Jurnal ECOTIPE*, *1*(2).

Garel, M., Lloyd, I., Vienne, M., David, N., Tamburini, C., & Martini, S. (2021). A ready-to-use logistic regression implemented in R shiny to estimate growth parameters of microorganisms. *[Data Set]*. *MIO UMR 7294 CNRS*, 1–13. https://doi.org/10.34930/dc1daf1c-09e3-4829-8878-91d0bf0e643e

Hartono, J. A., & Karnasih, I. (2017). Pentingnya Pemodelan Matematis dalam Pembelajaran Matematika. *Journal of Mathematics Education*, 1–8.

Hutagalung, S. N. (2017). Emahaman Metode Numerik (Studi Kasus Metode New-Rhapson) Menggunakan Pemprogrman Matlab. *Jurnal Teknologi Informasi*, *1*(1), 95. https://doi.org/10.36294/jurti.v1i1.109

Laurentina Wae Misi, M., Paulina Maure, O., Grace Ludji, D., & San Pedro, U. (2023). Comparison of the Malthus Population Model and the Verhulst Population Model in Estimating the Total Population of Ngada Regency. *Jurnal Kependidikan Matematika*, *43*(1), 43–52.

Muhlish. (2015). Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler Pada Tuberkulosis Dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulthon. *Journal of Mathematics, Computations and Statistics*, *151*(Rkf 45), 10–17.

Nuraeni, Z. (2017). Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Estimasi Jumlah Populasi. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *5*, 9–16.

Nurmadhani, N., & Faisol, F. (2022). Penerapan Model Pertumbuhan Logistik Dalam Memproyeksikan Jumlah Penduduk Di Kabupaten Sumenep. *Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika (JES-MAT)*, *8*(2), 145–156. https://doi.org/10.25134/jes-mat.v8i2.5436

Purwadi, P., Ramadhan, P. S., & Safitri, N. (2019). Penerapan Data Mining Untuk Mengestimasi Laju Pertumbuhan Penduduk Menggunakan Metode Regresi Linier Berganda Pada BPS Deli Serdang. *Jurnal SAINTIKOM (Jurnal Sains Manajemen Informatika Dan Komputer)*, *18*(1), 55. https://doi.org/10.53513/jis.v18i1.104

Raming, I., Wirawan, A. S., Syaripuddin, Putri, A. A., Aslina, Sahputra, D. R., Dala, M. A. D., & Avrilia, M. P. (2024). Pemetaan Pertumbuhan Penduduk di Kota Samarinda Melalui Pemodelan Logistik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton. *Journal of Mathematics, Computations and Statistics*, *7*(1), 133–143. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v7i1.1945

Sari, A. K., Widyasari, R., & Cipta, H. (2024). Persamaan Logistik Menggunakan Metode Adam-Bashforth-Moulton Dalam Memprediksi Jumlah Penduduk Di Indonesia. *Jurnal Lebesgue : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika Dan Statistika*, *5*(1), 111–119. https://doi.org/10.46306/lb.v5i1.519

Setiawan, L. I., & Mungkasi, S. (2021). Penyelesaian Model Epidemi Sir Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat Dan Metode Adams-Bashforth-Moulton. *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer Dan Matematika*, *18*(2), 55–61. https://doi.org/10.33751/komputasi.v18i2.3623

Side, S., Alimuddin, A., & Bani, A. (2019). Modifikasi Model SIR pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Kabupaten Bone. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *1*(2), 169. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v1i2.9240

Side, S., Wahyuni, M. S., & R, A. (2020). Solusi Numerik Model Verhulst pada Estimasi Pertumbuhan Hasil Panen Padi dengan Metode Adam Bashforth-Moulton (ABM). *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *2*(1), 91. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v2i1.12463

Sulma, S., & Nursamsi, N. (2023). Application of Exponential and Logistic Models in Estimating the Population of Bulukumba Regency in 2020-2030. *Journal of Mathematics and Applied Statistics*, *1*(2), 43–50. https://doi.org/10.35914/mathstat.v1i2.72

Suryani, I., Suprianto, A., Wartono, W., & Rahmadeni, R. (2023). Solusi Numerik Model Verhulst Pada Estimasi Pertumbuhan Produksi Padi Menggunakan Metode Milne-Simpson dan Metode Adams-Bashforth-Moulton. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *9*(1), 27. https://doi.org/10.24014/jsms.v9i1.19694

Tarisma, T., Saumi, F., Wardani, S., Zahara, Z., & Kristina, D. (2022). Comparison Of Euler Method And Runge Kutta Method In Estimation Of The Number Of Population In Aceh Province. *Mathline : Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *7*(2), 197–207. https://doi.org/10.31943/mathline.v7i2.279

Zulkarnaen, D. (2014). Proyeksi Populasi Penduduk Kota Bandung Menggunakan Model Pertumbuhan Populasi Verhulst Dengan Memvariasikan Interval Pengambilan Sampel. *Journal of Mathematics and Applied Statistics*, *8*(1), 14.