

PEMODELAN REGRESI SPLINE TRUNCATED BIRESPON PADA INFLASI DAN PDRB SUMATERA UTARA

Atika Mayang Sari¹, Sutarman², Fibri Rakhmawati³

Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan^{1,3}, Universitas Sumatera Utara²

Email: atika.mayang@uinsu.ac.id¹, Sutarman@usu.ac.id², fibri_rakhmawati@uinsu.ac.id³

Corresponding Author: Atika Mayang Sari email: atika.mayang@uinsu.ac.id

Abstrak. Regresi nonparametrik dengan pendekatan spline truncated birespon merupakan metode yang baik dalam menyelesaikan permasalahan bentuk kurva regresi tidak diketahui. Spline truncated memberikan fleksibilitas yang tinggi dalam mengestimasi kurva yang memiliki pola data cenderung berubah-ubah pada interval tertentu dan tidak memerlukan uji asumsi klasik. Adapun tujuan penelitian ini untuk mendapatkan model regresi spline truncated birespon terbaik pada inflasi dan PDRB Sumatera Utara. Penelitian ini menggunakan metode kualitatif dan menggunakan data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Sumatera Utara. Pemilihan model terbaik ditentukan berdasarkan titik knot yang optimal dengan menggunakan kriteria nilai GCV minimum. Hasil penelitian yang diperoleh yaitu model spline terbaik yang dengan 3 titik knot dengan nilai MSE sebesar 1,6028 dan nilai GCV minimum sebesar 0,0452. Persamaan model spline truncated birespon yang dihasilkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 = & 0,0789 + 0,1837x_1 - 0,8895(x_1 - 5,00)_+ + 0,7826(x_1 - 4,75)_+ \\ & - 0,4296(x_1 - 4,25)_+ - 2,1553x_2 - 9,7120(x_2 - 13436)_+ \\ & - 1,6008(x_2 - 13321)_+ + 9,9089(x_2 - 13548)_+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_2 = & -10558 - 11555x_1 - 16650(x_1 - 5,25)_+ + 50144(x_1 - 6)_+ \\ & + 54934(x_1 - 5,75)_+ + 190,3474x_2 - 105,1266(x_2 - 13576)_+ \\ & + 152,1266(x_2 - 14174)_+ - 13,828(x_2 - 14244)_+\end{aligned}$$

Nilai R^2 respon 1 sebesar 14,64% dan respon 2 sebesar 61,85%. Berarti kemampuan variabel prediktor dalam menjelaskan varians dari variabel responnya sebesar 14,64% dan 61,85% sisanya dipengaruhi oleh faktor-faktor lain.

Kata Kunci: Model regresi, spline truncated, birespon, titik knot, GCV

Abstract. A Nonparametric regression with a truncated biresponse spline approach is a good method in solving the problem of unknown shape of the regression curve. Truncated splines provide high flexibility in estimating curves that have data patterns that tend to change at certain intervals and do not require classic assumption tests. The purpose of this study was to obtain the best biresponse truncated spline regression model for North Sumatra's inflation and GRDP. This study uses qualitative methods and uses secondary data obtained from the Central Bureau of Statistics of North Sumatra. Selection of the best model is determined based on the optimal knot point using the minimum GCV value criteria. The research results obtained are the best spline model with 3 knot points with an MSE value of 1.6028 and a minimum GCV value of 0.0452. The resulting biresponse truncated spline model equation is as follows:



$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 0,0789 + 0,1837x_1 - 0,8895(x_1 - 5,00)_+ + 0,7826(x_1 - 4,75)_+ \\ &\quad - 0,4296(x_1 - 4,25)_+ - 2,1553x_2 - 9,7120(x_2 - 13436)_+ \\ &\quad - 1,6008(x_2 - 13321)_+ + 9,9089(x_2 - 13548)_+ \\ \hat{y}_2 &= -10558 - 11555x_1 - 16650(x_1 - 5,25)_+ + 50144(x_1 - 6)_+ \\ &\quad + 54934(x_1 - 5,75)_+ + 190,3474x_2 - 105,1266(x_2 - 13576)_+ \\ &\quad + 152,1266(x_2 - 14174)_+ - 13,828(x_2 - 14244)_+\end{aligned}$$

The value of response 1 is 14.64% and response 2 is 61.85%. This means that the ability of the predictor variable to explain the variance of the response variable is 14.64% and the remaining 61.85% is influenced by other factors.

Keywords: Regression model, truncated spline, birespon, knot point, GCV

A. Pendahuluan

Dalam beberapa penelitian, terdapat banyak masalah yang tidak bisa diatasi menggunakan analisis regresi sederhana satu respon, sebab harus dilihat nilai korelasi antar variabel jika menggunakan dua variabel dalam penelitian. Maka model terbaik tidak akan dihasilkan. Sehingga, masalah regresi harus diselesaikan dengan menggunakan model regresi birespon (Pratiwi, 2017)

Regresi birespon merupakan model yang terdiri dari variabel dependen (respon) lebih dari satu, diantaranya terdapat korelasi yang kuat (Nurdiani et al., 2017) Sehingga dapat dikatakan regresi birespon merupakan model regresi yang dapat membuat pola hubungan antara dua variabel respon dan beberapa variabel prediktor, dan antara respon pertama dan kedua saling berhubungan (Lestari et al., 2018)

Maka analisis regresi spline truncated dapat memodelkan data yang mempunyai pola cenderung berubah pada sub-sub interval tertentu (Rahmawati et al., 2019). Selanjutnya memungkinkan model ini untuk dapat menyesuaikan dengan karakteristik data dan model yang dibentuk pada data yang cenderung naik dan turun secara tajam seperti pada data inflasi dengan Bi Rate dan Kurs Rupiah Terhadap USD dan PDRB dengan Bi Rate dan Kurs Rupiah Terhadap USD yang memiliki pola cenderung berubah-ubah. Sehingga analisis regresi spline truncated birespon dapat digunakan untuk memodelkan laju inflasi dan PDRB Sumatera Utara.

Spline *truncated* dalam nonparametrik adalah pengembangan dari salah satu fungsi polinomial yang sifatnya tersusun dan kontinu (*spline truncated*). Regresi *spline* memberikan lebih banyak fleksibilitas daripada polinomial pada umumnya, karena memperhitungkan kemulusan kurva dan dipakai saat kurva regresinya tidak diketahui polanya. sehingga memungkinkan untuk lebih mudah beradaptasi pada karakteristik dari suatu fungsi (Syisliawati et al., 2016)

Spline mempunyai fleksibilitas yang sangat baik dalam mengestimasi kurva regresinya dengan $f(x_i)$ karena spline dapat mengestimasi pola data yang berubah-ubah pada sub interval tertentu dan pada fungsi tersebut terdapat titik knot (Hardle, 1990). Yaitu titik simpul atau penghubung pada perubahan perilaku pada kurva. Secara umum, model regresi spline berorde m dapat dituliskan dalam persamaan sebagai berikut :

$$y_j = \sum_{i=0}^m \beta_i x_i + \sum_{j=1}^k \beta_j (x - k_j)_+^m + \varepsilon_j \quad (2.7)$$

Dimana :

j : 1, 2, 3..., m

m : derajat polinomial $m = 1, 2$ dan 3



- k_j : banyak titik knot ($k_1, k_2, \dots, k_k$)
 ε_j : error acak independen dengan mean nol (0) dan varians σ^2 .
 x^j : Variabel prediktor ke-j.
 β : Koefisien pengganda nilai x_i terhadap variable respon.
 β_j : Koefisien pada variable x_i truncated knot ke-j pada *spline* berorde K .

Berdasarkan data BPS Sumatera Utara pada 3 juni 2021 inflasi Sumatera Utara dikategorikan masih tinggi. Inflasi Sumatera Utara pada Mei 2021 sebesar 0,22 persen. Sementara di bulan April tingkat inflasi masih 0,08 persen. Terlihat disini kenaikan laju inflasi yang cukup tinggi. Berdasarkan teori ekonomi, inflasi terjadi karena kelebihan permintaan excess demand di tingkat makro, maka dapat disimpulkan gejala inflasi muncul karena seluruh industri perekonomian mengalami kelebihan permintaan.

Sebagai sebuah negara berkembang, pembangunan ekonomi Indonesia menjadi prioritas utama dan selalu menjadi perhatian besar pemerintah. Hal ini dilakukan agar suatu negara menjadi negara maju, dengan salah satu syarat yaitu kemajuan dalam bidang ekonomi. Inflasi merupakan masalah dalam perekonomian suatu negara, karena inflasi terus menaikkan harga barang-barang secara berkelanjutan, sehingga berdampak pada turunnya kemampuan beli masyarakat (Simanungkalit, 2020)

Inflasi menjadi salah satu permasalahan yang sangat mengusik perekonomian di setiap negara. Dan pembangunan yang terus berkembang akan menjadi halangan bagi perekonomian untuk tumbuh ke arah yang lebih baik. Pengukuran output agregat yang sering digunakan yaitu produk domestik bruto (gross domestic product) yang merupakan nilai pasar dari semua barang dan jasa yang diproduksi oleh suatu negara selama satu tahun berjalan (Marliah, 2018).

Analisis regresi nonparametrik *spline* pernah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya (Nunung et al., 2017) menggunakan regresi *biresponse* *spline* untuk meneliti angka melek huruf dan rata-rata lama sekolah di Jawa Barat. (Suparti et al., 2019) meneliti pemodelan inflasi Jawa tengah dengan melibatkan variabel prediktor suku bunga Indonesia dengan regresi *spline truncated* dan linier *biresponse*.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, analisis regresi parametrik merupakan analisis statistika yang memerlukan asumsi dan data lebih dipaksa mengikuti pola tertentu, sedangkan analisis regresi nonparametrik *spline truncated* baik digunakan untuk menggambarkan pola hubungan antara variabel respon dan beberapa variabel prediktor yang saling berkorelasi dan memiliki fleksibilitas yang tinggi. Analisis ini paling cocok dalam situasi gambaran kurva regresinya tidak diketahui, dan dapat memodelkan data yang memiliki pola cenderung naik dan turun secara tajam seperti pada data laju inflasi dan PDRB. Dengan demikian, akan dilakukan pemodelan dengan regresi *spline truncated biresponse* pada inflasi dan PDRB Sumatera Utara.

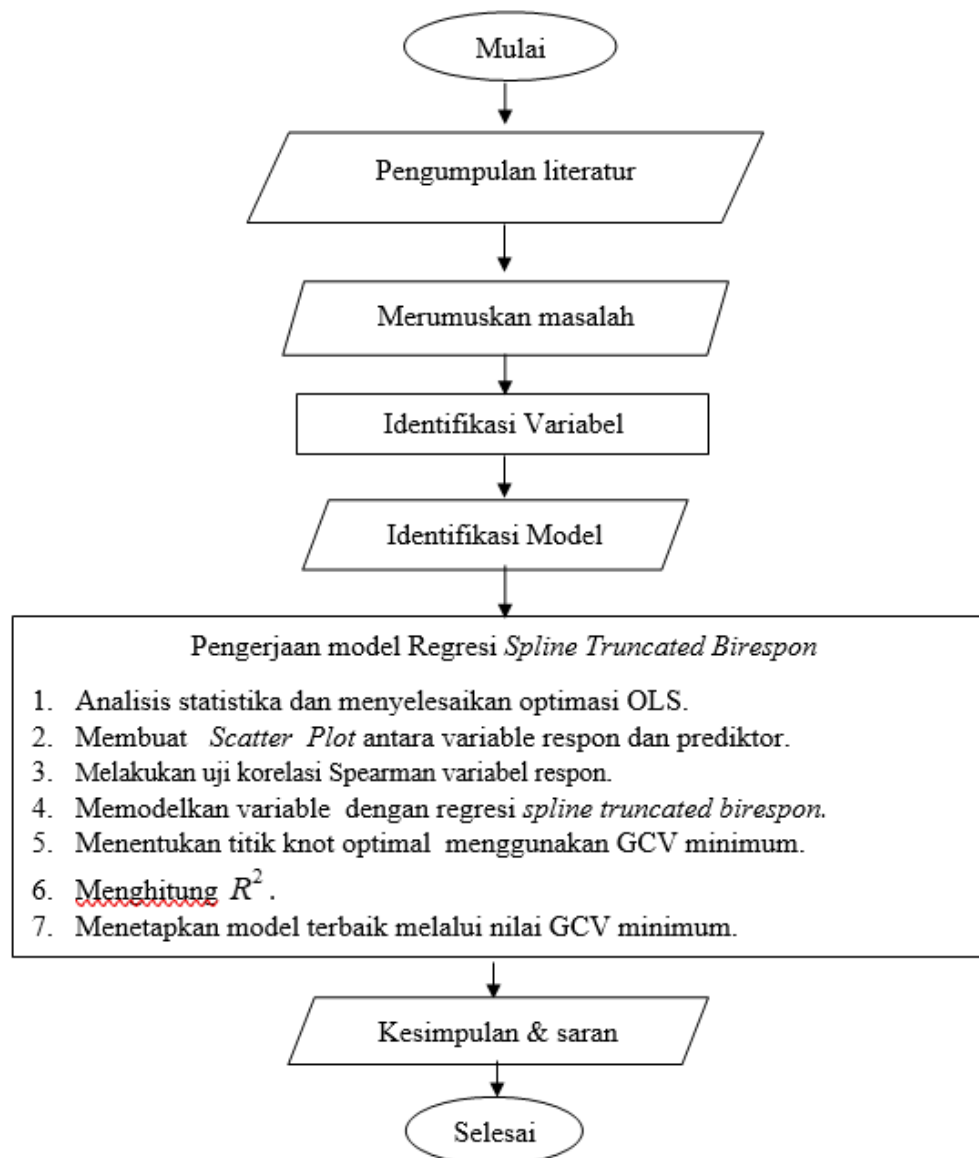
B. Metode Penelitian

Jenis Penelitian yang digunakan yaitu penelitian kuantitatif, yang didasarkan filsafat positif, yang bersifat spesifik, jelas dan terperinci. Penelitian kuantitatif digunakan untuk memeriksa secara acak populasi dan sampel tertentu dengan meneliti hubungan antar variabel untuk menguji beberapa teori. Penelitian kuantitatif ditentukan untuk menunjukkan hubungan antar variabel (Sugiyono, 2013).

Pada penelitian ini menggunakan data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Sumatera Utara yang telah dipublikasi (<https://www.sumut.bps.go.id>). Pada data laju inflasi dan PDRB sebagai variabel respon BI Rate dan Kurs Rp terhadap USD sebagai variabel prediktor.



Adapun prosedur atau tahapan yang akan dilakukan dalam menganalisis penelitian ini untuk mendapatkan model terbaik yaitu sebagai berikut:



C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada table 1 berikut ini disajikan statistika deskriptif dari data penelitian yang digunakan. Statistika deskriptif yang ditampilkan adalah nilai inflasi dan PDRB serta faktor yang mempengaruhi yaitu nilai rata-rata, standar deviasi, nilai minimum dan nilai maximum.

Tabel 1 Statistika deskriptif inflasi dan PDRB serta faktor yang mempengaruhi

Variabel	Rata-rata	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
Y_1	0,299%	0,7141%	-1,81 %	1,63 %
Y_2	1948837,45	16439,03	163990,31	222122,17
X_1	4,6%	0,88%	3,5%	6,00%
X_2	14243,3	690,065	13319	16367

Tabel 1 menunjukkan statistika deskriptif dari inflasi (Y_1) dan PDRB (Y_2) yaitu nilai rata-rata, standar deviasi, nilai minimum dan nilai maksimum. Berdasarkan Tabel 4.1. terlihat bahwa nilai rata-rata inflasi di Sumatera Utara sebesar 0,299% dengan standart deviasi sebesar 0,7141%, nilai minimum sebesar -1,81 % dan nilai maksimum sebesar 1,63 %. Sementara itu, nilai rata-rata PDRB sebesar 1948837,45 dengan standar deviasi sebesar 16439,03, nilai minimum sebesar 163990,31 dan nilai maksimum sebesar 222122,17.

1. Uji Korelasi Variabel Respon

Uji Korelasi dilakukan untuk mengetahui ada tidaknya hubungan antara dua variabel. Koefisien korelasi (r_s) digunakan untuk mengukur derajat erat antara satu variabel terhadap variabel lainnya dimana pengamatan pada masing-masing variabel tersebut didasarkan pada pemberian peringkat tertentu yang sesuai dengan pengamatan serta pasangannya. Pada analisis ini uji korelasi dilakukan ketika variabel respon yang digunakan lebih dari satu, apabila variabel respon tidak memiliki korelasi maka tidak dapat dilakukan analisis birespon.

Pada penelitian ini Uji Korelasi dilakukan dengan Uji Korelasi Spearman untuk variabel respon Y_1 dan Y_2 , yaitu inflasi dan Produk Domestik Regional Bruto (PDRB). Tujuan dilakukannya uji korelari Spearman yaitu untuk melihat keeratan hubungan dari dua variabel tersebut dan melihat jenis hubungannya.

Hipotesis :

$H_0: r_s = 0$ (kedua variable respon tidak memiliki korelasi)

$H_1: r_s \neq 0$ (kedua variable respon memiliki korelasi)

Taraf signifikan : $\alpha : 5\% = 0,05$

Nilai koefisien korelasi dapat dihitung menggunakan korelasi (r) sebagai berikut :

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i}{n(n^2 - 1)}$$

d_i perbedaan peringkat pasangan pada data ke i.

$$r_s = -0.386$$

Hasil r_s didapat dari output pada lampiran

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = -1.924$$

Nilai $t_{tabel} : t_{(1-\alpha, v)} = t_{(1-0,05; 18)} = 1,734$ dengan $v = n - 2$

Daerah kritis : H_0 ditolak jika diperoleh $|t| > t_{tabel}$

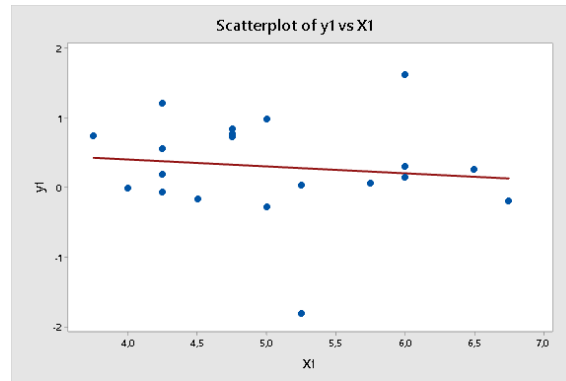
Keputusan : H_0 ditolak karena nilai $|t| (1.924) > t_{tabel} (1,734)$

Kesimpulan : Pada taraf signifikan 5% variabel inflasi dan PDRB memiliki korelasi.

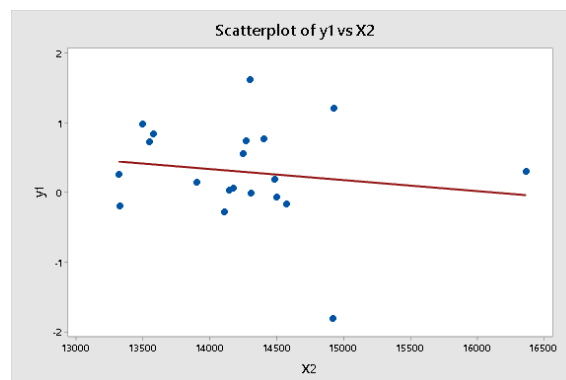
Berdasarkan uji hipotesis diatas, diperoleh kesimpulan bahwa variabel inflasi dan PDRB memiliki korelasi sehingga penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menggunakan analisis birespon. Nilai koefisien korelasi $r = -0,386$ berarti antara variabel Y_1 dan variabel Y_2 terdapat korelasi negatif sebesar 0,386.

2. Scatterplot Inflasi dan PDRB dengan BI Rate dan Nilai Tukar Rupiah Terhadap USD

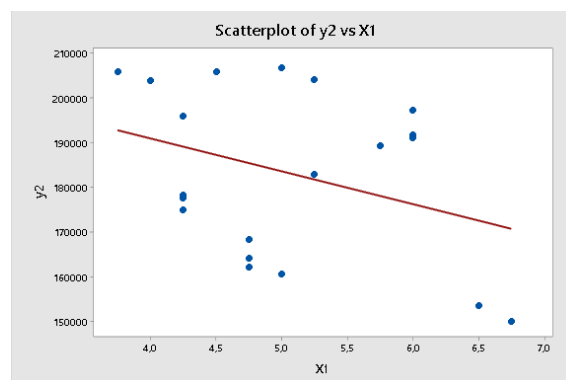
Pola hubungan yang terbentuk antar Inflasi (Y_1) dengan BI Rate (X_1) dan dapat disajikan pada Gambar 1 pola data antara Inflasi (Y_1) dengan nilai tukar rupiah terhadap USD (X_2) pada Gambar 2. Pola antara PDRB (Y_2) dengan BI Rate (X_1) dapat disajikan pada Gambar 3. Pola antara PDRB (Y_2) dengan nilai tukar rupiah terhadap USD (X_2) dapat disajikan pada Gambar 4.



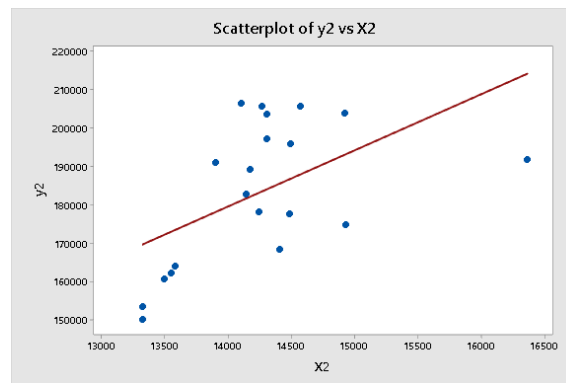
Gambar 1 *Scatterplot* antara Inflasi dengan BI Rate



Gambar 2 *Scatterplot* antara Inflasi dengan Nilai Tukar Rupiah terhadap USD



Gambar 3 *Scatterplot* antara PDRB dengan BI Rate



Gambar 4 *Scatterplot* antara PDRB dengan Nilai Tukar Rupiah terhadap USD

Berdasarkan Gambar 1, Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4. dapat dilihat bahwa dari keempat plot hubungan tersebut plot-plot data antara variabel respon yaitu inflasi dan PDRB dengan variabel prediktornya yaitu BI Rate dan Nilai tukar rupiah terhadap USD terdapat adanya unsur kenaikan dan penurunan data secara tajam serta tidak terdapat adanya kecenderungan pola hubungan tertentu sehingga tidak diketahui bentuk kurva regresinya. Sehingga mengindikasikan bahwa terdapat komponen nonparametrik dimana fungsi dari kurva regresi tidak diketahui, maka pemodelan yang tepat adalah memodelkan dengan regresi nonparametrik *birespon* dengan pendekatan yang digunakan yaitu *spline truncated*.

3. Pemilihan Titik Knot Optimal

Pemilihan titik knot antara variabel respon dan variabel prediktor dilakukan untuk mendapatkan model *spline truncated birespon* yang optimal. Pendekatan dengan orde 1 dan banyak titik knot yang akan digunakan pada kedua variabel prediktor yaitu 1 titik knot, 2 titik knot dan 3 titik knot.

Pada penelitian ini, menggunakan metode *Mean Square Error* (MSE) untuk menentukan orde dan titik knot optimal. Kombinasi optimal adalah kombinasi dengan nilai MSE minimum, yang nantinya akan menghasilkan estimasi terbaik. Kemudian menentukan nilai GCV minimum. Analisis pada data inflasi dan PDRB ini dilakukan dengan menggunakan program estimasi dengan pembobot W . matriks pembobot W ini merupakan invers dari matriks variansi-kovariansi *error* respon 1 dan *error* respon 2 yang diperoleh menggunakan software yang terlampir pada lampiran.

Adapun langkah-langkah manual yang dilakukan untuk mencari nilai GCV minimum adalah sebagai berikut :

a. Membuat Matriks Kolom Setiap Variabel

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -0,19 \\ 0,22 \\ 0,99 \\ 0,73 \\ 0,84 \\ 0,77 \\ 1,22 \\ 0,19 \\ 0,56 \\ 0,44 \\ 0,07 \\ 0,15 \\ 0,30 \\ 1,63 \\ -1,81 \\ -0,28 \\ -0,16 \\ -0,07 \\ -0,01 \\ 0,75 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 163990,31 \\ 168291,33 \\ 174806,84 \\ 177545,95 \\ 178284,09 \\ 182744,43 \\ 189181,99 \\ 191136,92 \\ 191789,52 \\ 197197,52 \\ 203978,09 \\ 206643,77 \\ 205729,42 \\ 195993,57 \\ 203806,18 \\ 205753,67 \\ 206957,15 \\ 212397,93 \\ 218398,11 \\ 221222,17 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4,75 \\ 4,75 \\ 4,25 \\ 4,25 \\ 4,25 \\ 5,25 \\ 5,75 \\ 6,00 \\ 6,00 \\ 6,00 \\ 5,25 \\ 5,00 \\ 4,50 \\ 4,25 \\ 4,00 \\ 3,75 \\ 3,50 \\ 3,50 \\ 3,50 \\ 3,50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 13276 \\ 13180 \\ 12998 \\ 13436 \\ 13321 \\ 13319 \\ 13492 \\ 13548 \\ 13576 \\ 14404 \\ 14929 \\ 14481 \\ 14244 \\ 14141 \\ 14174 \\ 13901 \\ 16367 \\ 14302 \\ 14918 \\ 14105 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

b. Menentukan Letak Titik Knot

Dalam menentukan titik knot, dapat dilakukan dengan beberapa cara yaitu membagi jumlah amatan sama banyak (*Knot* kuantil) dengan rumus pada persamaan 2.24, membagi jarak antar *Knot* sama besar pada persamaan 2.25, dan secara seleksi, cara ini dipilih menggunakan seluruh sebagai kandidat knot.. Penentu posisi knot dilakukan setelah variabel prediktor dan variabel respon diplotkan. Adapun hasil plot dapat dilihat pada gambar 4.1 hingga 4.4.

Pemilihan jumlah *knot* dapat dilakukan dengan melihat pola amatan yang akan dilakukan pendugaan. Titik knot yang dipilih adalah 1 titik knot dari variabel $x_1 = 3,75$ dan $x_2 = 13576$.

c. Membuat Matriks Kolom Identitas (X)

Pada saat menentukan matriks kolom nilainya harus lebih besar sama dengan 0, atau dengan kata lain terbentuk matriks berukuran 20×5 . Dengan rumus $[1, x_1, (x_1 - k), x_2, (x_2 - k)]$ nilai $k_1 = 3,75$ dan $k_2 = 13576$ maka diperoleh matriks X sebagai berikut.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4,75 & 1,25 & 13276 & -255 \\ 1 & 4,75 & 1,25 & 13180 & -257 \\ 1 & 4,25 & 0,75 & 12998 & -84 \\ 1 & 4,25 & 0,75 & 13436 & -28 \\ 1 & 4,25 & 0,75 & 13321 & 0 \\ 1 & 5,25 & 1,75 & 13319 & 828 \\ 1 & 5,75 & 2,25 & 13492 & 1353 \\ 1 & 6,00 & 2,5 & 13548 & 905 \\ 1 & 6,00 & 2,5 & 13576 & 668 \\ 1 & 6,00 & 2,5 & 14404 & 565 \\ 1 & 5,25 & 1,75 & 14929 & 598 \\ 1 & 5,00 & 1,5 & 14481 & 325 \\ 1 & 4,50 & 1 & 14244 & 2791 \\ 1 & 4,25 & 0,75 & 14141 & 726 \\ 1 & 4,00 & 0,5 & 14174 & 1342 \\ 1 & 3,75 & 0,25 & 13901 & 529 \\ 1 & 3,50 & 0 & 16367 & 996 \\ 1 & 3,50 & 0 & 14302 & 920 \\ 1 & 3,50 & 0 & 14918 & 731 \\ 1 & 3,50 & 0 & 14105 & 693 \end{bmatrix}$$

d. Membuat Transpose Matriks X

Menentukan transpose matriks X berukuran 5×20 .

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4,75 & 4,75 & 4,25 & 4,25 & 4,25 & 5,25 & 5,75 \\ 1,25 & 1,25 & 0,75 & 0,75 & 0,75 & 1,75 & 2,25 \\ 13321 & 13319 & 13492 & 13548 & 13576 & 14404 & 14929 \\ -225 & -257 & -84 & -28 & 0 & 828 & 1353 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 5,25 & 5 & 4,5 & 4,25 \\ 2,5 & 2,5 & 2,5 & 1,75 & 1,5 & 1 & 0,75 \\ 14481 & 14244 & 14141 & 14174 & 13901 & 16367 & 14302 \\ 905 & 668 & 565 & 598 & 325 & 2791 & 726 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3,75 & 3,5 & 3,5 & 3,5 & 3,5 & 3,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14918 & 14105 & 14572 & 14496 & 14307 & 14269 & 1342 \\ 529 & 996 & 920 & 731 & 693 & & \end{bmatrix}$$

e. Menentukan nilai β

Menentukan nilai β dengan menggunakan metode *ordinary least square* (OLS) dapat menggunakan persamaan berikut.

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 20 & 101 & 31 & 284866 & 13346 \\ 101 & 524,25 & 170,75 & 143661,75 & 65585,75 \\ 31 & 170,75 & 38,875 & 439630 & 18774 \\ 284866 & 143661,75 & 313459 & 4066479 & 1991387 \\ 13346 & 65585,75 & 18774 & 1991387 & 1795339 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 4,7425 & 2,7514 & -2,9017 & -4,3650 & 4,5108 \\ -1,36492 & 1,7557 & -4,2647 & 12495 & -1,6659 \\ 1,3647 & -1,656 & 4,2647 & -12495 & 2,6659 \\ -3,1415 & -2,2466 & 22465 & 28932 & -28932 \\ -3,1415 & 2,2466 & -22465 & -28932 & 28932 \end{bmatrix}$$

Determinan = -3,4688

Kemudian,

$$(X^T X)^{-1} X^T = \begin{bmatrix} -2,727 & -2,690 & -2,441 & -2,396 & -2,271 \\ 7,793 & 7,687 & 6,975 & 6,845 & 6,834 \\ -7,793 & -7,687 & -2,412 & -2,412 & -2,412 \\ -5,054 & -2,956 & -6,341 & -2,014 & -2,241 \\ -4,959 & -7,248 & -0 & -2,241 & -3,004 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2,271 & -2,119 & -2,185 & -2,219 & -2,384 \\ 6,488 & 6,056 & 6,243 & 6,342 & 6,812 \\ -6,488 & -6,056 & -6,243 & -6,342 & -6,812 \\ -7,629 & 1,526 & 2,670 & 2,288 & -4,196 \\ 2,288 & 7,629 & 5,341 & 1,907 & 6,866 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2,454 & -2,531 & -2,172 & -2,473 & -2,271 \\ 7,011 & 7,231 & 6,204 & 7,064 & 6,488 \\ -7,011 & -7,231 & -6,204 & -7,064 & -6,488 \\ -6,485 & 1,907 & -7,629 & 0 & -8,392 \\ 3,815 & 3,242 & 0 & 5,341 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2,351 & -2,209 & -2,183 & -2,173 & -2,142 \\ 6,719 & 6,312 & 6,237 & 6,209 & 6,118 \\ -6,719 & -6,312 & -6,237 & -6,209 & -6,118 \\ -7,439 & -8,392 & 1,526 & -2,288 & 2,288 \\ -8,583 & -3,815 & 6,866 & -4,577 & 2,228 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} -1,398 \\ 3,996 \\ -3,996 \\ 2,635 \\ -0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} -8,543 \\ 2,438 \\ -2,438 \\ -120,294 \\ 105,771 \end{bmatrix}$$

f. Menghitung Nilai Transaksi Variabel Respon

Menghitung nilai transaksi variabel respon ($\hat{y}_1$) dan ($\hat{y}_2$) serta residual yang diperoleh yaitu :

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} -2,173 \\ -1,923 \\ -1,075 \\ -1,022 \\ -1,026 \\ -0,995 \\ -0,884 \\ -1,305 \\ -1,811 \\ -1,892 \\ -2,289 \\ -1,956 \\ -1,431 \\ -1,175 \\ -1,062 \\ -0,925 \\ -0,801 \\ -0,685 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} -3333357,27 \\ -3333328,23 \\ -2942624,88 \\ -3074510,23 \\ -3074916,89 \\ -3086942,76 \\ -2897959,86 \\ -2891453,11 \\ -2888010,93 \\ -3279730,95 \\ -3280210,25 \\ -3341781,19 \\ -3377597,37 \\ -3347605,32 \\ -3291016,10 \\ -2951528,09 \\ -2925542,79 \\ -2891670,97 \\ -2872541,94 \\ -2847414,03 \end{bmatrix}$$

$$\text{Residual} = Y_1 - \hat{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1,983 \\ 2,183 \\ 2,065 \\ 1,752 \\ 1,866 \\ 1,930 \\ 2,215 \\ 1,113 \\ 1,444 \\ 1,345 \\ 1,881 \\ 2,042 \\ 2,589 \\ 3,586 \\ -0,379 \\ 0,895 \\ 0,902 \\ 0,855 \\ 0,791 \\ 1,435 \end{bmatrix}$$

$$\text{Residual} = Y_2 - \hat{Y}_2 = \begin{bmatrix} 3483378,28 \\ 3486759,38 \\ 3103177,21 \\ 3236568,63 \\ 3238907,21 \\ 3255234,09 \\ 3072766,71 \\ 3068999,06 \\ 3066295,02 \\ 3462475,38 \\ 3469392,24 \\ 3532918,12 \\ 3569386,89 \\ 3544802,84 \\ 3494994,19 \\ 3158171,86 \\ 3131272,22 \\ 3087664,54 \\ 3076348,12 \\ 3053167,69 \end{bmatrix}$$

g. Menentukan Nilai Mean Square Error (MSE)

Salah satu kriteria yang digunakan untuk menentukan model regresi terbaik yaitu *Mean Square Error* (MSE). Berdasarkan persamaan (2.23) menghitung nilai MSE dengan rumus sebagai berikut:

$$MSE = n^{-1}((y_i - \hat{y})^T (y_i - \hat{y}))$$

dengan,

$$\hat{y} : A(k_1, k_2, \dots, k_x)y$$

$$A(k): \text{matriks } X(X^T X)^{-1} X^T$$

$A =$	1,4361	1,2552	0,2947	0,3955	0,4614	0,4744	0,6858	0,6648	0,6610	0,8235
	1,3143	1,1655	0,2421	0,3370	0,4040	0,4169	0,6567	0,6345	0,6130	0,7556
	0,6016	0,5480	-0,1298	0,0010	0,0698	0,0827	0,3952	0,3720	0,3682	0,2923
	0,4776	0,4361	-0,2372	-0,0800	-0,0156	-0,0027	0,3384	0,3175	0,3146	0,2386
	0,4815	0,4409	-0,2254	-0,0751	-0,0096	0,0033	0,3410	0,3195	0,3164	0,2322
	0,4815	0,4409	-0,2252	-0,0750	-0,0095	0,0034	0,3411	0,3195	0,3164	0,2321
	0,2414	0,2306	-0,3679	-0,1918	-0,1297	-0,1150	0,7408	0,2383	0,2357	0,1011
	0,2395	0,2283	-0,3737	-0,1941	-0,1309	-0,1179	0,2578	0,7626	0,2348	0,1043
	0,2359	0,2272	-0,3766	-0,1954	-0,1323	-0,1194	0,2572	0,2369	0,7656	0,1058
	0,6797	0,5991	-0,2114	-0,0119	0,0429	0,0558	0,4104	0,3941	0,3936	0,4488
	0,8965	0,7804	-0,1403	0,0908	0,1404	0,1533	0,4768	0,4630	0,4637	0,6188
	1,0521	0,9240	-0,0162	0,1567	0,2107	0,2237	0,5337	0,5177	0,5174	0,6720
	1,0600	0,9338	0,0080	0,1668	0,2232	0,2361	0,5390	0,5219	0,5211	0,6587
	1,0634	0,9381	0,0185	0,1711	0,2286	0,2415	0,5414	0,5237	0,5226	0,6530
	0,6873	0,6086	-0,1879	-0,0020	0,0550	0,0679	0,4156	0,3982	0,3971	0,4361
	0,5714	0,5105	-0,2224	-0,0373	0,0224	0,0353	0,3749	0,3561	0,3544	0,3427
	0,2548	0,2051	-0,6002	-0,2672	-0,2319	-0,2189	0,2413	0,2344	0,2387	0,3396
	0,2143	0,1970	-0,4510	-0,2262	-0,1704	-0,1575	0,2409	0,2240	0,2233	0,1463
	0,0687	0,0621	-0,5766	-0,3149	-0,2652	-0,2523	0,1801	0,1663	0,1670	0,1026
	0,0291	0,0135	-0,5558	-0,3428	-0,2851	-0,2721	0,1515	0,1338	0,1326	-0,0209
	0,7013	1,2183	1,3710	1,3220	0,9110	0,3478	0,7931	0,6977	0,3353	0,2188
	0,5979	1,1186	1,2725	1,2251	0,8137	0,2878	0,7121	0,6626	0,2974	0,1869
	0,0483	0,5291	0,6541	0,6097	0,3540	-0,1137	0,2708	0,3742	0,0660	0,0293
	-0,0020	0,4625	0,5665	0,5148	0,2918	-0,2031	0,2771	0,3447	0,0496	0,0012
	-0,0130	0,4554	0,5607	0,5110	0,2876	-0,2001	0,2549	0,3401	0,0416	0,0004
	-0,0130	0,4552	0,5606	0,5109	0,2875	-0,2002	0,2545	0,3400	0,0415	0,0003
	-0,1830	0,2629	0,3661	0,3135	0,1375	-0,3451	0,1472	0,2531	-0,0245	0,0608
	-0,1774	0,2663	0,3689	0,3153	0,1396	-0,3466	0,1580	0,2553	-0,0206	-0,0604
	-0,1745	0,2681	0,3703	0,3162	0,1406	-0,3473	0,1634	0,2564	-0,0187	-0,0602
	0,2685	0,7101	0,8176	0,7497	0,4831	-0,0874	0,6042	0,4767	0,1951	0,0550
	0,5091	0,9457	1,0467	0,9701	0,6584	0,0397	0,8459	0,5912	0,3098	0,1212
	0,5420	1,0117	1,1183	1,0491	0,7046	0,0981	0,8065	0,6204	0,2942	0,1337
	0,5180	0,9970	1,1065	1,0413	0,6960	0,1042	0,7609	0,6110	0,2777	0,1320
	0,5179	0,9901	1,1014	1,0380	0,6923	0,1068	0,7410	0,6069	0,2706	0,1312
	0,2453	0,6959	0,8062	0,7422	0,4748	-0,0814	0,5599	0,4676	0,1791	0,0533
	0,1396	0,5851	0,6989	0,6394	0,3867	-0,1369	0,4448	0,4099	0,1289	0,0358
	0,2014	0,5349	0,6181	0,5174	0,3198	-0,3410	0,7793	0,4138	0,2224	-0,0090
	-0,1011	0,3131	0,4063	0,3401	0,1669	-0,3660	0,3033	0,7147	0,0318	-0,0550
	-0,1326	0,2575	0,3431	0,2667	0,1111	-0,4443	0,3595	0,2627	0,9565	-0,0819
	-0,3086	0,1134	0,2090	0,1462	0,0035	-0,4859	0,1404	0,1836	-0,0443	-0,1189

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A}) \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -3,9797 \\ -3,2566 \\ -0,4193 \\ -0,1822 \\ -0,1022 \\ -0,1727 \\ 1,0004 \\ -0,0149 \\ 0,3623 \\ -1,3138 \\ -1,8613 \\ -2,2612 \\ -2,1733 \\ -0,8702 \\ -3,2238 \\ -1,4536 \\ 0,0244 \\ -0,0782 \\ 0,5033 \\ 1,4119 \end{bmatrix}_{(20 \times 1)}$$

$$((\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{Y})^T = \begin{bmatrix} -3,9797 & -3,2566 & -0,4193 & -0,1822 & -0,1022 & -0,1727 \\ 1,0004 & -0,0149 & 0,3623 & -1,3138 & -1,8613 & -2,2612 \\ -2,17333 & -0,8702 & -3,2238 & -1,4536 & 0,0244 & -0,0782 \\ 0,5033 & 1,4119 \end{bmatrix}_{(1 \times 20)}$$

$$MSE = \frac{(((\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{Y})^T((\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{Y}))}{n} = \frac{15,2607393}{20} = 0,7630$$

Menghitung nilai GCV dengan Persamaan (2.17)

$$GCV(k_1, k_2, \dots, k_x) = \frac{MSE(k_1, k_2, \dots, k_x)}{(n^{-1} \text{Trace}[\mathbf{I}-\mathbf{A}(k_1, k_2, \dots, k_x)])^2}$$

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= (-0,436103821) - 0,165506363 + 1,129849434 + 1,080049038 + 1,009631157 + \\ & 0,99657917 + 0,74088788 + 0,76265496 + 0,765625 + 0,551118851 + 0,490880966 \\ & - 0,011693001 - 0,106571198 - 0,03801012 + 0,525203705 + 1,136954308 + \\ & 0,220743179 + 0,714770317 + 0,956544876 + 1,118980885) \\ & = 17,47101605 \end{aligned}$$

$$N = (n^{-1}Tr(\mathbf{I}-\mathbf{A}))^2 = \left(\frac{17,47101605}{20} \right)^2 = 0,76309$$

$$GCV = \frac{MSE}{(n^{-1}Tr(\mathbf{I}-\mathbf{A}))^2} = \frac{0,76303}{0,76309} = 0,999$$



Selanjutnya, perhitungan *spline truncated birespon* dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* Matlab R2017b. Pemilihan titik knot optimal dilakukan dengan mencari nilai GCV terendah yang dihasilkan. GCV yang dihasilkan dengan menggunakan satu, dua dan tiga titik knot ditunjukkan pada tabel 2 dan 3.

Tabel 2 Nilai MSE dan GCV dengan 1 titik knot dan 2 titik knot

Nilai MSE dan GCV dengan 1 titik knot						Nilai MSE dan GCV dengan 2 titik knot									
Titik knot respon 2				MS E	GC V	Titik knot respon 1				Titik knot respon 2				MS E	GC V
k_{11}	k_{21}	k_{12}	k_{22}			k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}		
5,0	135	3,7	135	8,70	3,86	5,0	3,7	135	144	5,7	5,2	142	141	5,86	1,30
0	76	5	76	40	84	0	5	76	04	5	5	44	74	71	74
4,0	132	6,0	131	8,70	3,86	4,0	4,2	141	141	4,7	5,2	139	132	5,84	2,08
0	76	0	80	56	92	0	5	74	05	5	5	01	76	91	49
4,2	134	4,7	139	8,70	4,05	6,0	5,2	144	135	5,0	5,2	163	143	4,15	2,38
5	36	5	01	43	21	0	5	04	76	0	5	67	02	73	93
5,2	134	5,0	133	8,70	3,85	3,7	6,0	133	133	5,7	6,0	134	135	3,40	1,16
5	92	0	19	54	42	5	0	21	19	5	0	92	48	01	00
4,5	141	6,7	149	8,73	3,84	4,7	4,0	134	144	4,0	5,2	142	141	3,86	0,45
0	05	5	29	44	60	5	0	92	81	0	5	44	74	42	71

Tabel 3 Nilai MSE dan GCV dan MSE dengan 3 titik knot

Nilai MSE dan GCV dengan 3 titik knot													
Titik knot respon 1						Titik knot respon 2						MSE	GCV
k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{21}	k_{22}	k_{23}		
6,0	6,5	6,7	1440	1491	1448	5,0	6,7	5,2	1492	1491	1430	4,360	0,792
0	0	5	4	8	1	0	5	5	9	8	2	5	7
6,7	6,0	6,5	1636	1491	1410	6,5	5,2	6,7	1410	1417	1424	1,025	0,417
5	0	0	7	8	5	0	5	5	5	4	4	0	7
5,0	4,7	4,2	1343	1332	1354	5,2	6,0	5,7	1357	1417	1424	1,727	0,045
0	5	5	6	1	8	5	0	5	6	4	4	3	0
4,7	4,0	4,5	1417	1491	1636	5,0	5,2	4,7	1343	1354	1636	2,870	0,265
5	0	0	4	8	7	0	5	5	6	8	7	8	5
5,2	6,7	4,0	1440	1349	1448	5,0	5,5	5,2	1410	1491	1430	1,281	0,293
5	5	0	4	2	1	0	0	5	5	8	2	9	3

Berdasarkan Tabel 2 dapat diketahui bahwa model *spline truncated birespon* terbaik dengan satu titik knot adalah model dengan nilai GCV terkecil yaitu sebesar 3,8460. Model ini memiliki titik knot pada $k_1 = 4,50$ dan $k_2 = 14105$ untuk respon 1 pada titik knot $k_1 = 6,75$ dan $k_2 = 14929$ untuk respon 2.

Model *spline truncated birespon* terbaik dengan dua titik knot adalah model dengan nilai GCV terkecil yaitu sebesar 0,4571. model ini memiliki titik knot pada $k_{11} = 4,75$, $k_{21} = 13492$, $k_{12} = 4,00$ dan $k_{22} = 14481$ untuk respon 1 dan pada titik knot pada $k_{11} = 4,00$, $k_{21} = 14244$, $k_{12} = 5,25$ dan $k_{22} = 14174$ untuk respon 2.

Berdasarkan Tabel 3 dapat diketahui bahwa model *spline truncated birespon* terbaik dengan tiga titik knot adalah model dengan nilai GCV terkecil yaitu sebesar 0,0452 dan nilai MSE sebesar 1,6028. Model ini memiliki titik knot pada $k_{11} = 5,00$, $k_{12} = 4,75$, $k_{13} = 4,25$, $k_{21} = 13436$, $k_{22} = 13321$, dan $k_{23} = 13548$ untuk respon 1. Titik knot untuk respon 2 yaitu pada $k_{11} = 5,25$, $k_{12} = 6,00$, $k_{13} = 5,75$, $k_{21} = 13576$, $k_{22} = 14174$, dan $k_{23} = 14244$.

h. Pemodelan Regresi Spline Truncated Birespon

Berdasarkan pembahasan diatas maka dapat dibentuk model *Spline Truncated birespon* untuk variable y_1 dengan 1 titik knot sebagai berikut :



Tabel 4 Estimasi Model Regresi Spline dengan 1 titik knot optimal

Respon 1	Parameter	Estimasi Parameter	Respon 2	Parameter	Estimasi Parameter
Y_1	β_0	51,3566	Y_2	β_0	29336
	β_1	3,6584		β_1	-55292
	β_2	-3,7536		β_2	49070
	β_3	-0,0048		β_3	18,0184
	β_4	0,0043		β_4	-0,1063

Berdasarkan Tabel 4 estimasi parameter model terbaik spline *truncated* birespon untuk variabel respon Y_1 dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{y}_1 = (-51,3566) + 3,6584x_1 - 3,7536(x_1 - 4,50)_+ \\ - 0,0048x_2 + 0,0043(x_2 - 14105)_+ \\ \hat{y}_1 = (-51,3566) + f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

dengan,

$$\hat{f}_1(x_1) = 3,6584x_1 - 3,7536(x_1 - 4,50)_+ \\ \hat{f}_1(x_2) = -0,0048x_2 + 0,0043(x_2 - 14105)_+$$

dengan persamaan model spline *truncated* terbaik untuk respon Y_1 adalah:

$$\hat{y}_1(x_1) = \begin{cases} -3,7536x_1 & x_1 < 4,50 \\ 16,8912 - 0,0952 & x_1 \geq 4,50 \end{cases} \\ \hat{y}_1(x_2) = \begin{cases} -0,0048x_2 & x_2 < 14105 \\ -64,1947 - 0,0005 & x_2 \geq 14105 \end{cases}$$

Estimasi parameter model terbaik spline *truncated* birespon untuk variabel respon Y_2 dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{y}_2 = 29336 - 55292x_1 + 49070(x_1 - 6,75)_+ \\ + 18,0184x_2 - 0,1063(x_2 - 14929)_+ \\ \hat{y}_2 = 29336 + f_2(x_1) + f_2(x_2)$$

dengan,

$$\hat{f}_2(x_1) = -55292x_1 + 49070(x_1 - 6,75)_+ \\ \hat{f}_2(x_2) = 18,0184x_2 - 0,1063(x_2 - 14929)_+$$

dengan persamaan model spline *truncated* terbaik untuk respon Y_2 adalah:

$$\hat{y}_2(x_1) = \begin{cases} -55292x_1 & x_1 < 6,75 \\ -331,223 - 6,222 & x_1 \geq 6,75 \end{cases} \\ \hat{y}_1(x_2) = \begin{cases} 18,0184x_2 & x_2 < 14929 \\ 1586,95 + 17,9121x_2 & x_2 \geq 14105 \end{cases}$$



Tabel 5 Estimasi Model Regresi Spline dengan 2 titik knot optimal

Respon 1	Parameter	Estimasi Parameter	Respon 2	Parameter	Estimasi Parameter
Y_1	β_0	0,0553	Y_2	β_0	2391
	β_1	0,0524		β_1	-1291
	β_2	0,4784		β_2	3912
	β_3	-0,4659		β_3	-3038
	β_4	3,0814		β_4	-779
	β_5	-0,0009		β_5	-2127
	β_6	0,0005		β_6	2065

Berdasarkan Tabel 5 estimasi parameter model terbaik spline *truncated* birespon untuk variabel respon Y_1 dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 0,0553 + 0,0524x_1 + 0,4784(x_1 - 3,75)_+ - 0,4659(x_1 - 13321)_+ \\ &\quad + 3,0814x_2 - 0,0009(x_2 - 6)_+ + 0,0005(x_2 - 13391)_+ \\ \hat{y}_1 &= 0,0553 + f_1(x_1) + f_1(x_2)\end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(x_1) &= 0,0524x_1 + 0,4784(x_1 - 3,75)_+ - 0,4659(x_1 - 13321)_+ \\ \hat{f}_1(x_2) &= 3,0814x_2 - 0,0009(x_2 - 6)_+ + 0,0005(x_2 - 13391)_+\end{aligned}$$

dengan persamaan model spline *truncated* terbaik untuk respon Y_1 adalah:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(x_1) &= \begin{cases} 0,0524x_1 & x_1 < 3,75 \\ -1,794 + 0,5308x_1 & x_1 \geq 3,75 \\ 6204,46 - 0,971x_1 & 3,75 \leq x_1 < 13321 \end{cases} \\ \hat{y}_1(x_2) &= \begin{cases} 3,0814x_2 & x_2 < 3,75 \\ 0,0054 + 3,0805x_2 & x_2 \geq 3,75 \\ -6,6901 + 3,081x_2 & 3,75 \leq x_2 < 13391 \end{cases}\end{aligned}$$

Estimasi parameter model terbaik spline *truncated* birespon untuk variabel respon Y_2 dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\hat{y}_2 &= 2391 - 1291x_1 + 3912(x_1 - 5,75)_+ - 3038(x_1 - 13492)_+ \\ &\quad - 779x_2 - 2127(x_2 - 6)_+ + 2065(x_2 - 13548)_+ \\ \hat{y}_2 &= 2391 + f_2(x_1) + f_2(x_2)\end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(x_1) &= -1291x_1 + 3912(x_1 - 5,75)_+ - 3038(x_1 - 13492)_+ \\ \hat{f}_2(x_2) &= -779x_2 - 2127(x_2 - 6)_+ + 2065(x_2 - 13548)_+\end{aligned}$$

dengan persamaan model spline *truncated* terbaik untuk respon Y_2 adalah:



$$\hat{y}_1(x_1) = \begin{cases} -1291x_1 & x_1 < 6,75 \\ -27494 + 2621x_1 & x_1 \geq 6,75 \\ 40966 - 417x_1 & 6,75 \leq x_1 < 13492 \end{cases}$$

$$\hat{y}_1(x_2) = \begin{cases} -779x_2 & x_2 < 6 \\ 12762 - 2906x_2 & x_2 \geq 6 \\ -27963 - 841x_2 & 6 \leq x_2 < 13548 \end{cases}$$

Tabel 6 Estimasi Model Regresi Spline dengan 3 titik knot optimal

Respon 1	Parameter	Estimasi Parameter	Respon 2	Parameter	Estimasi Parameter
Y ₁	$\hat{\beta}_0$	0,0789	Y ₂	$\hat{\beta}_0$	-10558
	$\hat{\beta}_1$	0,1837		$\hat{\beta}_1$	-11555
	$\hat{\beta}_2$	-0,8895		$\hat{\beta}_2$	-16650
	$\hat{\beta}_3$	0,7826		$\hat{\beta}_3$	50144
	$\hat{\beta}_4$	-0,4296		$\hat{\beta}_4$	54934
	$\hat{\beta}_5$	-2,1553		$\hat{\beta}_5$	190,347
	$\hat{\beta}_6$	-9,0804		$\hat{\beta}_6$	-105,126
	$\hat{\beta}_7$	-0,0002		$\hat{\beta}_7$	152,122
	$\hat{\beta}_8$	0,0009		$\hat{\beta}_8$	-13,828

Berdasarkan Tabel 4.6 estimasi parameter model terbaik spline *truncated* birespon untuk variabel respon Y₁ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= 0,0789 + 0,1837x_1 - 0,8895(x_1 - 5,00)_+ + 0,7826(x_1 - 4,75)_+ \\ &\quad - 0,4296(x_1 - 4,25)_+ - 2,1553x_2 - 9,7120(x_2 - 13436)_+ \\ &\quad - 0,0002(x_2 - 13321)_+ + 0,0009(x_2 - 13548)_+ \\ \hat{y}_1 &= 0,0789 + f_1(x_1) + f_1(x_2) \\ \hat{f}_1(x_1) &= 0,1837x_1 - 0,8895(x_1 - 5,00)_+ + 0,7826(x_1 - 4,75)_+ \\ &\quad - 0,4296(x_1 - 4,25)_+ \\ \hat{f}_1(x_2) &= -2,1553x_2 - 9,7120(x_2 - 13436)_+ - 0,0002(x_2 - 13321)_+ \\ &\quad + 0,0009(x_2 - 13548)_+ \end{aligned}$$

dengan persamaan model spline *truncated* terbaik untuk respon Y₁ adalah:

$$\hat{y}_1(x_1) = \begin{cases} 0,1837x_2 & x_2 < 5 \\ 4,4475 - 0,7058x_2 & x_2 \geq 5 \\ 0,7302 + 0,0768x_2 & 5 \leq x_2 < 4,75 \\ 2,5560 - 0,3528x_2 & 4,25 \leq x_2 < 4,25 \end{cases}$$

$$\hat{y}_1(x_2) = \begin{cases} -2,1553x_2 & x_2 < 13436 \\ 130490,4 - 11,8673x_2 & x_2 \geq 13436 \\ 130493,1 - 11,8675x_2 & 13436 \leq x_2 < 13321 \\ 130480,9 - 11,8666x_2 & 13321 \leq x_2 < 13548 \end{cases}$$

Estimasi parameter model terbaik spline *truncated* birespon untuk variabel respon Y_2 dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 &= -10558 - 11555x_1 - 16650(x_1 - 5,25)_+ + 50144(x_1 - 6)_+ \\ &\quad + 54934(x_1 - 5,75)_+ + 190,3474x_2 - 105,1266(x_2 - 13576)_+ \\ &\quad + 152,1266(x_2 - 14174)_+ - 13,828(x_2 - 14244)_+ \\ \hat{y}_2 &= -10558 + f_2(x_1) + f_2(x_2) \end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(x_1) &= -11555x_1 - 16650(x_1 - 5,25)_+ + 50144(x_1 - 6)_+ \\ &\quad + 54934(x_1 - 5,75)_+ \\ \hat{f}_2(x_2) &= 190,3474x_2 - 105,1266(x_2 - 13576)_+ + 152,1266(x_2 - 14174)_+ \\ &\quad - 13,8277(x_2 - 14244)_+ \end{aligned}$$

dengan persamaan model spline *truncated* terbaik untuk respon Y_1 adalah:

$$\hat{y}_1(x_1) = \begin{cases} -11555x_1 & x_1 < 5,25 \\ 87413 - 28205x_1 & x_1 \geq 5,25 \\ -213451 + 21939x_1 & 5,25 \leq x_1 < 6 \\ -529322 + 76873x_1 & 6 \leq x_1 < 5,75 \end{cases}$$

$$\hat{y}_1(x_2) = \begin{cases} 190,1347x_2 & x_2 < 13576 \\ 1427198,7 + 85,2208x_2 & x_2 \geq 13576 \\ 729043,7 + 237,3474x_2 & 13576 \leq x_2 < 14174 \\ -153208 + 223,5197x_2 & 14174 \leq x_2 < 14244 \end{cases}$$

i. Pemilihan Model Terbaik

Setelah melakukan pemodelan regresi spline *truncated birespon* dengan 1 titik knot, 2 titik knot dan 3 titik knot maka selanjutnya dilakukan pemilihan model terbaik. Pemilihan model terbaik berdasarkan nilai GCV terkecil dan nilai koefisien determinasi.

Tabel 7 Pemilihan titik knot optimal berdasarkan nilai GCV terendah

Model	MSE	GCV
1 titik knot	8,7344	3,8460
2 titik knot	1,2509	0,4571
3 titik knot	1,7273	0,0452

Berdasarkan tabel 4.7 model terbaik didapat dengan menggunakan 3 titik knot optimal dengan nilai GCV minimum 0,0452. Hasil estimasi model menggunakan dua titik knot adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 = & 0,0789 + 0,1837x_1 - 0,8895(x_1 - 5,00)_+ + 0,7826(x_1 - 4,75)_+ \\ & - 0,4296(x_1 - 4,25)_+ - 2,1553x_2 - 9,7120(x_2 - 13436)_+ \\ & - 0,0002(x_2 - 13321)_+ + 0,0009(x_2 - 13548)_+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_2 = & -10558 - 11555x_1 - 16650(x_1 - 5,25)_+ + 50144(x_1 - 6)_+ \\ & + 54934(x_1 - 5,75)_+ + 190,3474x_2 - 105,1266(x_2 - 13576)_+ \\ & + 152,1266(x_2 - 14174)_+ - 13,828(x_2 - 14244)_+\end{aligned}$$

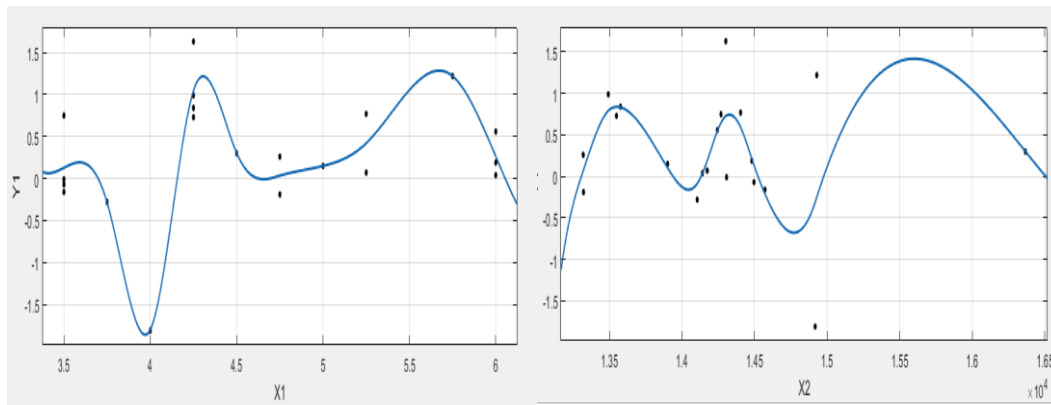
j. Ukuran Kebaikan Model

Pada penelitian ini ukuran kebaikan model yang digunakan yaitu Koefisien Determinasi (R^2). Koefisien Determinasi merupakan besaran yang digunakan untuk mengukur seberapa besar presentase keragaman dalam variabel respon yang dijelaskan variabel prediktor. Berdasarkan persamaan 2.26 maka dapat dihitung nilai R^2 sebagai berikut:

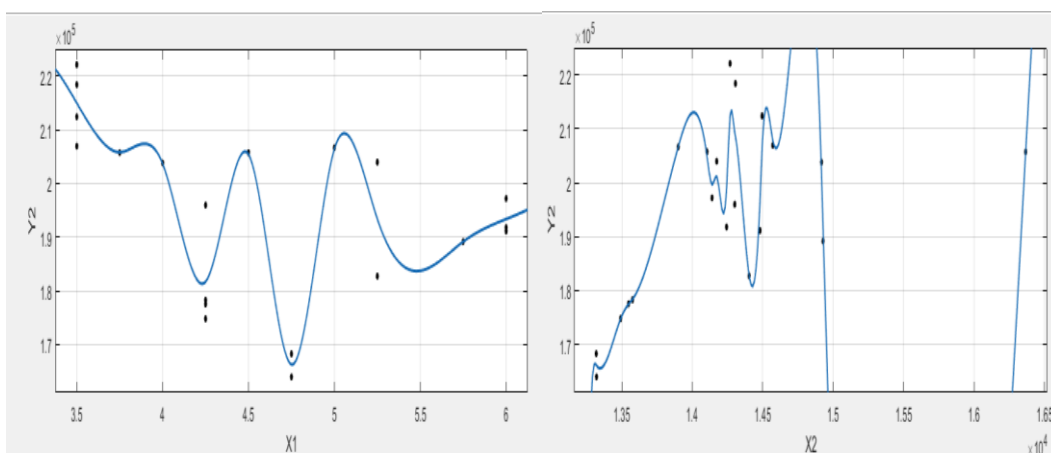
$$R^2 = \frac{SS_{\text{Regresi}}}{SS_{\text{total}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}$$

Berdasarkan perhitungan pada lampiran 6, nilai koefisien determinasi regresi spline *truncated* dengan 3 titik knot pada respon 1 yaitu inflasi sebesar 14,64% yang berarti kemampuan variabel prediktor dalam menjelaskan varians dari variabel responnya sebesar 14,64% dan respon 2 yaitu PDRB sebesar 61,85% yang berarti kemampuan variabel prediktor dalam menjelaskan varians dari variabel responnya sebesar 61,85% dan sisanya dipengaruhi oleh variabel lain yang tidak dijelaskan dalam penelitian ini.

Kemudian diperoleh hasil estimasi kurva regresi spline *truncated* birespon terhadap masing-masing variabel.



Gambar 4.5 Estimasi kurva spline truncated birespon pada variabel Y_1 terhadap X_1 dan X_2



Gambar 4.6 Estimasi kurva spline *truncated birespon* pada variabel Y_2 terhadap X_1 dan X_2

Berdasarkan gambar 4.5 dan gambar 4.6, terlihat bahwa kurva regresi spline *truncated* yang dihasilkan mengikuti perilaku data dengan baik. Hal ini disebabkan adanya parameter penghalus yang digunakan, yaitu titik knot.

D. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada pemodelan regresi spline *truncated birespon* pada inflasi dan PDRB Sumatera Utara model regresi spline *truncated birespon* terbaik dengan tiga titik knot yaitu pada titik knot $k_{11}=5,00$, $k_{12}=4,75$, $k_{13}=4,25$, $k_{21}=13436$, $k_{22}=13321$, dan $k_{23}=13548$ untuk respon 1. $k_{11}=5,25$, $k_{12}=6,00$, $k_{13}=5,75$, $k_{21}=13576$, $k_{22}=14174$, dan $k_{23}=14244$ untuk respon 2, dengan nilai MSE sebesar 1,6028 dan nilai GCV sebesar 0,0452.

Persamaan model spline *truncated birespon* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 0,0789 + 0,1837x_1 - 0,8895(x_1 - 5,00)_+ + 0,7826(x_1 - 4,75)_+ \\ &\quad - 0,4296(x_1 - 4,25)_+ - 2,1553x_2 - 9,7120(x_2 - 13436)_+ \\ &\quad - 1,6008(x_2 - 13321)_+ + 9,9089(x_2 - 13548)_+ \\ \hat{y}_2 &= -10558 - 11555x_1 - 16650(x_1 - 5,25)_+ + 50144(x_1 - 6)_+ \\ &\quad + 54934(x_1 - 5,75)_+ + 190,3474x_2 - 105,1266(x_2 - 13576)_+ \\ &\quad + 152,1266(x_2 - 14174)_+ - 13,828(x_2 - 14244)_+\end{aligned}$$

Dari model spline *truncated* birespon terbaik didapat nilai koefisien determinasi pada respon 1 sebesar 14,64% dan respon 2 sebesar 61,84%. Berarti kemampuan variabel prediktor dalam menjelaskan varians dari variabel responnya sebesar 14,64% dan 61,85% dan sisanya dipengaruhi oleh faktor-faktor lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Hardle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press.
- Lestari, B., Chamidah, N., & Saifudin, T. (2018). Estimasi Fungsi Regresi Dalam Model Regresi Nonparametrik Birespon Menggunakan Estimator Smoothing Spline dan Estimator Kernel. *Jurnal Matematika Statistika Dan Komputasi*, 15(2), 20. <https://doi.org/10.20956/jmsk.v15i2.5710>
- Nurdiani, N., Herrhyanto, N., & Dasari, D. (2017). Regresi Nonparametrik Birespon Spline. *Jurnal EurekaMatika*, 5(1), 106–121.
- Pratiwi, L. P. S. (2017). Pemodelan Spline Truncated dalam Regresi Nonparametrik Birespon. *Konferensi Nasional Sistem & Informatika*, 441–445.
- Rahmawati, R. D., Suparti, & Prahutama, A. (2019). Pemodelan Inflasi dan Indeks Harga Saham Gabungan Menggunakan Regresi Nonparametrik Birespon Spline Truncated Dengan Pembobot Invers Matriks Varians-Kovariansi Error Respon. *Statistika*, 7(1), 29–38.
- Simanungkalit, E. F. B. (2020). Pengaruh Inflasi Terhadap Pertumbuhan Ekonomi di Indonesia. *Journal of Management*, 13(3), 327–340.
- Suparti, Prahutama, A., Rusgiyono, A., & Sudargo. (2019). Modeling central java inflation and grdp rate using spline truncated birespon regression and birespon linear model 1. *Media Statistika*, 12(2), 129–139. <https://doi.org/10.14710/medstat.12.2.129-139>.
- Syisliawati, Wibowo, W., & Budiantara, I. N. (2016). Regression Spline Truncated Curve in Nonparametric Regression. *PROCEEDING OF 3RD INTERNATIONAL CPNFERENCE RESEARCH, IMPLEMENTATION AND EDUCATION OF MATHEMATICS AND SCIENCE*, May, 16–17.
- Weley, I. R., Kumenaung, A. G., Sumual, J. I., & Ratulangi, U. S. (2019). Analisis pengaruh inflasi dan produk domestik regional bruto (pdrb) terhadap pendapatan asli daerah di kota manado. *Fakultas Ekonomi Dan Bisnis Program Magister Ilmu Ekonomi Universitas Sam Ratulangi*, 1–10.

