Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

KEKONVERGENAN METODE ADOMIAN BARU PADA PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRRA NONLINEAR JENIS KEDUA

Helena Devi Ariyani
Politeknik Maritim Negeri Indonesia
Email: helenaariyani@polimarin.ac.id

Corresponding Author : Helena Devi Ariyani email: helenaariyani@polimarin.ac.id

Abstrak. Banyak permasalahan di dunia yang dapat dibuat menjadi model matematika. Persamaan integral merupakan persamaan yang sering dijumpai pada model matematika. Persamaan integral yang akan dibahas merupakan persamaan integral Volterra nonlinear tipe kedua. Persamaan integral Volterra nonlinear tiap kedua adalah persamaan yang fungsi yang tidak diketahui muncul di dalam dan di luar tanda integral dan batas integrasinya adalah konstanta dan variabel yang fungsinya tidak diketahui di dalam tanda integral adalah fungsi nonlinear. Metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra nonlinear tipe kedua adalah metode dekomposisi Adomian. Seiring berjalannya waktu, terdapat metode yang lebih efisien dengan memodifikasi metode dekomposisi Adomian. Metode hasil modifikasi tersebut dinamakan metode modifikasi dekomposisi Adomian. Metode modifikasi dekomposisi Adomian ternyata lebih cepat konvergen ke solusi eksak dibandingkan dengan metode dekomposisi Adomian. Solusi numerik yang dihasilkan metode modifikasi dekomposisi Adomian juga memiliki eror yang lebih kecil dibandingkan dengan metode dekomposisi Adomian.

Kata Kunci: Persamaan integral Volterra, konvergensi, nonlinear.

Abstract. *Many problems in the world can be made into mathematical models. The integral equation are equation that are often found in mathematical models. The integral equation that will be discussed is the second type of nonlinear Volterra integral equation. The second type of nonlinear Volterra integral equation is an equation in which unknown functions appear inside and outside the integral sign and the limits of integration are constants and variables whose unknown functions inside the integral sign are nonlinear functions. The method commonly used to solve the second type of nonlinear Volterra integral equation is the Adomian decomposition method. As time goes by, there are more efficient methods by modifying the Adomian decomposition method. The modified Adomian decomposition method turns out to converge more quickly to the exact solution compared to the Adomian decomposition method. The numerical solution produced by the modified Adomian decomposition method also has a smaller error compared to the Adomian decomposition method.*
Keywords: ***Volterra integral equation, convergence, nonlinear.***

A. Pendahuluan

Banyak fenomena yang terjadi di alam dapat dijelaskan dengan suatu model matematika. Model matematika tersebut umumnya dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial. Bentuk persamaan diferensial yang dihasilkan biasanya dalam bentuk tak linear. Secara analitik, masalah tak linear ini sulit diselesaikan, bahkan secara numerik dihadapkan pada perhitungan yang rumit. Tetapi dalam beberapa fenomena, model matematika dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan integral, yaitu suatu persamaan dimana variabel yang ingin diketahui termuat dalam *integrand* persamaan integral tersebut(Adomian, 2000).

Model matematika yang dinyatakan dalam bentuk persamaan integral sering muncul pada permasalahan dibidang fisika, teknik, ekonomi, biologi, dan lainnya. Studi literatur menyebutkan beberapa contoh model matematika antara lain adalah model untuk menentukan: laju pertumbuhan penduduk, proses penyaringan asap rokok, intensitas radiasi yang ditransfer, dan lainnya (Adomian, 2000). Dalam beberapa kasus, model matematika yang muncul berupa suatu persamaan integral. Persamaan integral diklasifikasikan ke dalam dua bentuk berdasarkan batas pengintegralan pada integral yang muncul dalam persamaan, yaitu persamaan integral Volterra dan persamaan integral Fredholm (Hochstadt, H.,1973).

Berdasarkan dari pengklasifikasian tersebut, diperoleh bahwa dalam kehidupan nyata model yang paling sering digunakan adalah persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua. Persamaan integral jenis tersebut sering digunakan karena merupakan jenis persamaan integral yang lebih mudah diselesaikan dengan metode numerik dibandingkan jenis lainnya. Oleh karena itu, sangat diperlukan pengkajian mengenai metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua tersebut.

Metode yang dipilih untuk mengkaji masalah tersebut adalah metode dekomposisi Adomian dan metode dekomposisi Adomian atau metode modifikasi dekomposisi Adomian (Adomian, 2000). Metode dekomposisi Adomian diperkenalkan dan dikembangkan oleh George Adomian. Berbagai riset telah diinvestasikan dalam menerapkan metode ini termasuk untuk persamaan diferensial maupun persamaan integral linear dan nonlinear. Salah satu yang pernah dibahas adalah tentang analisis eror dari metode dekomposisi Adomian (El-Kalla, I.L, 2005). Namun untuk metode modifikasi dekomposisi Adomian belum pernah dibahas mengenai kekonvergenannya dan eror yang dihasilkan oleh solusi numeriknya. Penelitian mengenai kekonvergenan metode modifikasi dekomposisi Adomian diperlukan agar algoritma metode dapat menghasilkan solusi numerik yang mendekati solusi eksak, namun dengan cara yang lebih mudah.

1. Persamaan Integral Volterrra Nonlinear Jenis Kedua

Pada artikel ini akan dibahas mengenai penyelesaian analitik untuk persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua yang dinyatakan dalam bentuk umum sebagai:

$$u(x) = h(x) + \int_0^x K(x,t)\, f(u(t))\, dt, \tag{1}$$

dengan fungsi u adalah fungsi yang akan dicari atau fungsi yang tak diketahui, fungsi yang tak diketahui, fungsi $h(x)$ dan fungsi kernel *K(x,t)* adalah fungsi yang telah diberikan. Pada persamaan (1) diasumsikan bahwa $h(x)$ untuk semua $x \in J = [0, N]$, dan kernel $K(x,t)$ diasumsikan untuk membatasi $|K(x,t)| \leq M$, untuk setiap $0 \leq t \leq x \leq N$, dengan $f(u(t))$ adalah fungsi nonlinear dari $u(t)$. Bentuk nonlinear $f(u)$ adalah kontinu Lipschitz dengan definisi

$$|f(u) - f(p)| \leq L|u - p| \tag{2}$$

Penyelesaian persamaan (1) dapat dilakukan dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian baru yang merupakan hasil modifikasi dari metode dekomposisi Adomian lama (Waz – waz, I.L.,2011). Dengan menggunakan metode ini untuk menyelesaikan persamaan integral nonlinear diperoleh solusi yang mendekati solusi eksak.

2. Polinomial Adomian Lama

Metode dekomposisi Adomian terdiri dari penguraian solusi deret dalam bentuk deret fungsi:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i\,(x) \tag{3}$$

dengan u_i adalah perhitungan rekursif dan fungsi nonlinear dari fungsi $f(u)$ didefinisikan sebagai:

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i\,(u_0, u_1, \ldots.). \tag{4}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3) dan persamaan (4) ke persamaan integral Volterra nonlinear diperoleh:

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) = h(x) + \int_0^x K(x,t) \sum_{i=0}^{\infty} A_i\,(u_0(t), u_1(t), \ldots) dt. \tag{5}$$

Dari persamaan (5) dapat diketahui A_0 fungsi dari u_0, A_1 fungsi dari u_0 dan u_1, A_2 fungsi dari u_0 dan u_1, dan u_2, sehingga A_i fungsi dari $u_0, u_1, \ldots, u_i$. Kemudian, dari persamaan (5) dapat dibentuk rumus rekursif sebagai berikut:

$$u_0(x) = h(x),$$

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t)\, A_0\,(u_0(t)) dt,$$

$$u_2(x) = \int_0^x K(x,t)\, A_1(u_0(t), u_1\,(t)) dt,$$

$$\vdots$$

$$u_i(x) = \int_0^x K(x,t)\, A_{i-1}(u_0(t), u_1\,(t), \ldots, u_{i-1}(t)) dt,$$

Fungsi nonlinear *f(u)* pada persamaan integral Volterra nonlinear dapat diperluas menggunakan deret Taylor untuk u mendekati u_0, yaitu:

$$f(u) = f(u_0) + (u - u_0) f'(u_0) + \frac{1}{2!}(u - u_0)^2 f''(u_0) + \frac{1}{3!}(u - u_0)^3 f''(u_0) + \cdots \tag{6}$$

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u_1 + u_2 + u_3) + \frac{1}{2!}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots)^2 f''(u_0)$$
$$+ \frac{1}{3!}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots)^3 f'''(u_0) + \cdots$$

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots) + \frac{1}{2!} f''(u_0)({u_1}^2 + 2u_1u_2$$
$$+ 2u_1u_3 + \ldots + {u_2}^2 + 2u_2u_3 + \ldots + {u_3}^2 + \ldots) + \frac{1}{3!} f'''(u_0)({u_1}^3 + 3{u_1}^2u_2$$
$$+ 3u_1{u_2}^2 + 3{u_1}^2u_3 + 3u_1{u_3}^2 + \ldots + {u_2}^3 + 3{u_2}^2u_3$$
$$+ 3u_2{u_3}^2 + \ldots + 3{u_3}^2 + \ldots) + \ldots$$

Dari persamaan (6) diperoleh polinomial Adomian lama sebagai berikut:

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0)$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2!} {u_1}^2 f''(u_0)$$

$$A_3 = u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} {u_1}^3 f'''(u_0)$$

$$A_n = \left(\frac{1}{n!}\right) \frac{d^n}{d\lambda^n} (f(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i))$$

3. Metode Dekomposisi Adomian Lama

Metode dekomposisi Adomian mengasumsikan bahwa fungsi linear tak diketahui u(x) dapat direpresentasikan dengan deret dekomposisi tak hingga (Bartle, R.G & Sherbet, D.R.,2010) sebagai:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (x) \tag{7}$$

dimana $u_n(x),\ n \geq 0,$ dapat dihitung melalui rekursif yaitu

$$u_0(x) = h(x),$$

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x K(x,t)\, A_n(t) dt,\ \ n \geq 0 \tag{8}$$

4. Polinomial Modifikasi Adomian

Pada metode dekomposisi Adomian untuk persamaan integral nonlinear Volterra, suku – suku nonlinear pada persamaan integral tersebut secara khusus, yang disebut Polinomial Adomian, yang dilambangkan dengan $A_n, n \geq 0$ $(\mathrm{Polyanin, A.\,D\ \&\ Manzhirov, A.\,V.\,,2008})$. Polinomial Adomian didefinisikan dengan:

$$A_n = f(S_n) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j \tag{9}$$

dengan $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i (x) = \int_0^x K(x,t) A_{i-1}\, dt, i \geq 1.$ Berdasarkan persamaan fungsi nonlinear $f(u)$ dapat disusun sebagai berikut:

$$f(u) = f(u_0) + (u_1 f'(u_0) + \frac{1}{2!} {u_1}^2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} {u_1}^3 f'''(u_0) + \cdots + u_2 f'(u_0)$$

$$+ \frac{1}{2!} ({u_2}^2 + 2u_1 u_2) f''(u_0) + \frac{1}{3!} (3{u_1}^2 u_2 + 3u_1 {u_2}^2 + {u_2}^3) f'''(u_0) + \cdots$$

$$+ u_3 f'(u_0) + \frac{1}{2!} ({u_3}^2 + 2u_1 u_3 + 2u_2 u_3) f''(u_0) + \frac{1}{3!} ({u_3}^3 + 3{u_3}^2 (u_1 + u_2)$$

$$+ 3u_3 (u_1 + u_2)^2) f'''(u_0) + \ldots)$$

Sehingga diperoleh polinomial Adomian:

$A_0 = f(u_0),$

$$A_1 = u_1 f'(u_0) + \frac{1}{2!} {u_1}^2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} {u_1}^3 f'''(u_0) + \cdots,$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2!}({u_2}^2 + 2u_1u_2) f''(u_0) + \frac{1}{3!}(3{u_1}^2 u_2 + 3u_1{u_2}^2 + {u_2}^3) f'''(u_0) + \cdots, \quad (10)$$

$$A_3 = u_3 f'(u_0) + \frac{1}{2!}({u_3}^2 + 2u_1u_3 + 2u_2u_3) f''(u_0) + \frac{1}{3!}({u_3}^3 + 3{u_3}^2(u_1 + u_2) + 3u_3(u_1 + u_2)^2) f'''(u_0) + \ldots),$$

Misalkan jumlah parsial $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)$, maka dari persamaan (9) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$A_0 = f(u_0) = f(S_0)$$

$$A_0 + A_1 = f(u_0) + \left(u_1 f'(u_0) + \frac{1}{2!} {u_1}^2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} {u_1}^3 f'''(u_0) + \cdots\right)$$

$$= f(u_0 + u_1)$$

$$A_0 + A_1 = f(S_1)$$

$$A_0 + A_1 + A_2 = f(u_0 + u_1) + (u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2}({u_2}^2 + 2u_1u_2) f''(u_0) + \frac{1}{6}(3{u_1}^2 u_2 + 3u_1{u_2}^2 + {u_2}^3 f'''(u_0) + \ldots$$

$$= f(u_0 + u_1 + u_2)$$

$$A_0 + A_1 + A_2 = f(S_2)$$

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = f(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$$

Misalkan $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$, maka:

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i + A_n = f(S_n)$$

Sehingga diperoleh rumus lain untuk polinomial modifikasi Adomian:

$$A_n = f(S_n) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i.$$

B. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kuantitatif dengan fokus studi literatur. Pembahasan dilakukan dengan terlebih dahulu mempelajari konsep algoritma metode dekomposisi Adomian lama dan modifikasi Adomian. Kemudian setelah itu dipelajari penerapannya untuk menentukan suku – suku Adomian. Untuk menentukan solusi numerik atas persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua tersebut dilakukan perhitungan numerik dengan membuat script metode iterasi menggunakan Maple. Selanjutnya dihitung nilai eror dari solusi numerik tersebut terhadap solusi eksaknya.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai langkah – langkah simulasi numerik untuk mendapatkan penyelesaian numerik persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua. Selain itu, akan dijelaskan pula mengenai perbandingan eror yang didapat dengan pengambilan N yang berbeda.

Simulasi Numerik Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian

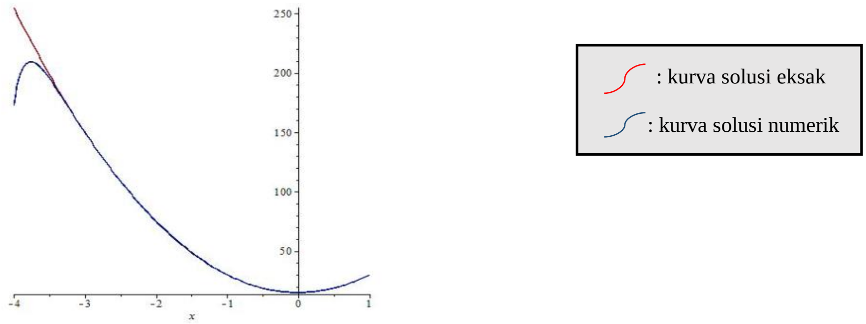
Pada bagian pertama ini, akan disimulasikan cara mendapatkan solusi numerik untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra jenis kedua menggunakan metode dekomposisi Adomian.

Diberikan persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua sebagai berikut:

$$u(x) = \frac{1}{20}(300 + 315x^2 + 5x^4 + x^6) - \frac{1}{150}\int_0^x (x - t)u^2(t)dt, 0 \leq x \leq 1 \qquad (11)$$

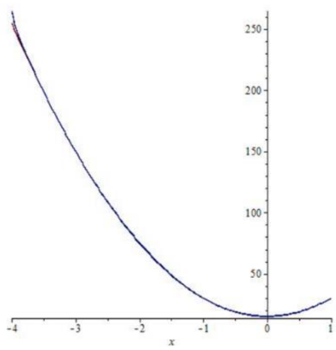
Selanjutnya, akan dicari solusi numerik $u(x)$ untuk persamaan (11) dengan menggunakan bantuan software Maple. Pada simulasi ini, diambil n dengan nilai berbeda, yaitu n =5, n = 10, n = 15, dan n = 20.

a. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (11) dengan pengambilan n = 5. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 1. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk n =5

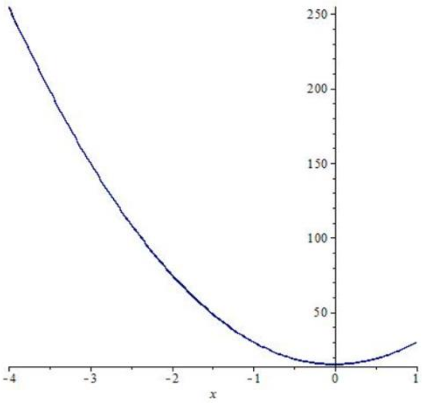
b. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (11) dengan pengambilan n = 5. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 2. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk n =10

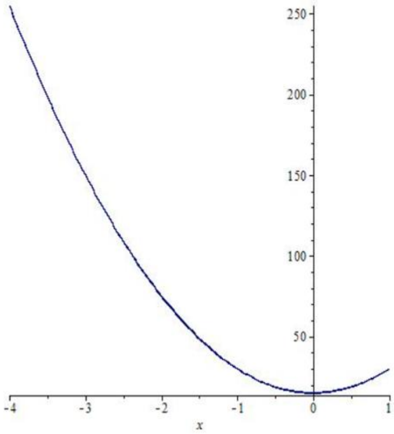
Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

c. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (11) dengan pengambilan n = 15. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 3. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk *n* =15

d. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (11) dengan pengambilan n = 20. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 4. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk *n* =20

Gambar 1,2,3, dan 4 menunjukkan perbandingan solusi numerik dari metode dekomposisi Adomian lama untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua pada persamaan (11). Perbedaan keempat gambar solusi numerik tersebut terletak pada pengambilan *n (suku Adomian)*, yaitu pengambilan jumlah suku yang menentukan dalam dekomposisi deret untuk mencari solusi. Dari gambar 1, 2, 3, dan 4 dapat dilihat bahwa yang memiliki solusi numerik yang paling mendekati solusi analitik adalah gambar 4. Pada gambar 3 dan 4, solusi numerik yang dihasilkan memberikan grafik yang sama persis dengan grafik solusi analitik, sedangkan pada gambar 2, terdapat beberapa bagian grafik solusi numerik yang melenceng dari grafik solusi analitik. Hasil solusi numerik yang disajikan pada gambar 1 paling banyak memiliki bagian yang melenceng dari grafik solusi analitik. Oleh sebab itu, dari sini dapat dilihat bahwa semakin besar pengambilan jumlah suku, maka grafik solusi numerik yang dihasilkan akan semakin mendekati solusi analitik.

Taksiran Eror Untuk Metode Dekomposisi Adomian

Berikut diberikan tabel estimasi eror untuk tiap – tiap n yang diambil pada simulasi numerik menggunakan metode dekomposisi Adomian lama.

Tabel 1 **Tabel Eror Metode Dekomposisi Adomian Lama**

n	eror	eror maksimum
5	$1.23333.10^{-3}$	0.109693
10	$6.27671.\ 10^{-9}$	0.00112326
15	$2.60089.\ 10^{-14}$	0.000115022
20	$9.79976.\ 10^{-38}$	$1.17782.\ 10^{-7}$

Simulasi Numerik Menggunakan Metode Modifikasi Adomian

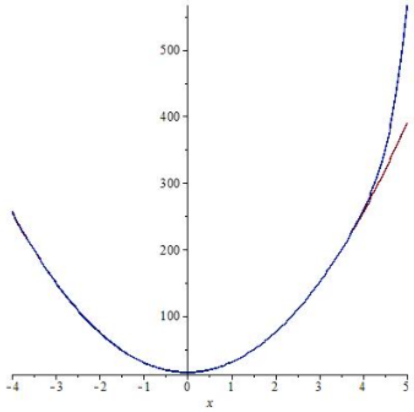
Pada bagian kedua ini, akan disimulasikan cara mendapatkan solusi numerik untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra jenis kedua menggunakan metode modifikasi Adomian.

Diberikan persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua sebagai berikut:

$$y(t) = \frac{1}{20}(300 + 315t^2 + 5t^4 + t^6) - \frac{1}{150}\int_0^x (t - \tau)y^2(\tau)dt, 0 \leq t \leq 1 \qquad (12)$$

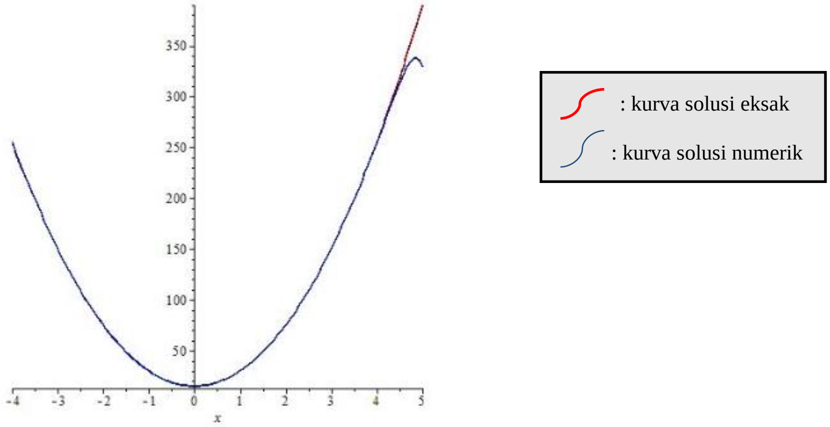
Selanjutnya, akan dicari solusi numerik $y(t)$ untuk persamaan (12) dengan menggunakan bantuan software Maple. Pada simulasi ini, diambil m dengan nilai berbeda, yaitu *n* =4, *n* = 5, *n* = 6, dan *n* = 7.

a. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (12) dengan pengambilan n = 4. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



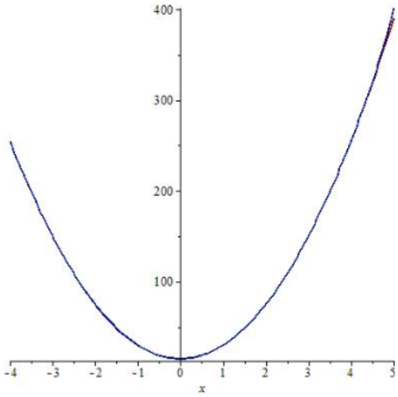
Gambar 5. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk *n* =4

b. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (12) dengan pengambilan n = 5. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



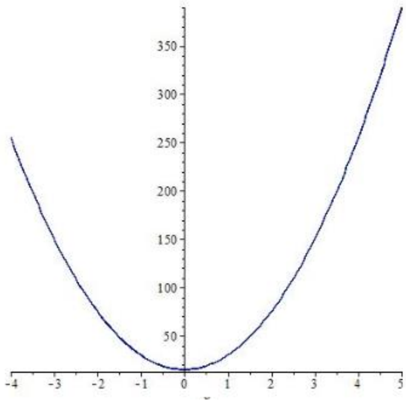
Gambar 6. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk *n* =5

c. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (12) dengan pengambilan n = 6. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 7. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk *n* =6

d. Simulasi numerik penyelesaian persamaan (12) dengan pengambilan n = 7. Setelah itu, grafik solusi pendekatan dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 8. Grafik solusi pendekatan metode dekomposisi Adomian untuk *n* =7

Gambar 5,6,7, dan 8 menunjukkan perbandingan solusi numerik dari metode modifikasi Adomian untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra nonlinear jenis kedua pada persamaan (12). Perbedaan keempat gambar solusi numerik tersebut terletak pada pengambilan n, yaitu pengambilan jumlah suku yang menentukan dalam dekomposisi deret untuk mencari solusi. Dari gambar 5, 6, 7, dan 8 dapat dilihat bahwa yang memliki solusi numerik paling mendekati solusi analitik adalah gambar 8. Pada gambar 7 dan 8, solusi numerik yang dihasilkan memberikan grafik yang sama persis dengan grafik solusi analitik, sedangkan pada gambar 6, terdapat beberapa bagian grafik solusi numerik yang melenceng dari grafik solusi analitik. Hasil solusi numerik yang disajikan pada gambar 5 paling banyak memiliki bagian yang melenceng dari grafik solusi analitik. Oleh sebab itu, dari sini dapat dilihat bahwa semakin besar pengambilan jumlah suku, maka grafik solusi numerik yang dihasilkan akan semakin mendekati solusi analitik.

Taksiran Eror Untuk Metode Modifikasi Dekomposisi Adomian

Berikut diberikan tabel estimasi eror untuk tiap – tiap m yang diambil pada simulasi numerik menggunakan metode modifikasi dekomposisi Adomian.

Tabel 2 **Tabel Eror Metode Modifikasi Dekomposisi Adomian**

n	eror	eror maksimum
4	$1.65228.10^{-9}$	0.27423
5	$2.74217.10^{-13}$	0.10969
6	$5.43239.\ 10^{-19}$	0. 043877
7	$7.68642.\ 10^{-40}$	0.017551

D. Kesimpulan

Berdasarkan hasil studi literatur dan studi kasus pada bab – bab sebelumnya, dapat diperoleh kesimpulan bahwa solusi numerik yang dihasilkan menggunakan metode modifikasi dekomposisi Adomian lebih cepat konvergen daripada solusi numerik yang dihasilkan menggunakan metode modifikasi dekomposisi Adomian. Solusi numerik yang dihasilkan menggunakan metode modifikasi dekomposisi Adomian memiliki eror yang lebih kecil daripada eror yang dihasilkan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G.,. (2000). Solving Frontier Problems of Physics : The Decomposition Method. Kluwer – Academic Press. Boston.

Aryati, L. (2011). Pengantar Persamaan Diferensial Parsial. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Gadjah Mada.

Atkinson, K. (2005). Theoretical Numerical Analysis. Third Ed. Springer, New York.

Bartle, R.G.,& Sherbet, D.R. (2010). Introduction to Real Analysis. Fourth Edition. John Wiley and Sons,Inc. Urbana.

El-Kalla, I.L. (2005). Convergence of the Adomian Method to a Class of Nonlinear Integral Equations. Applied Mathematics Letters. No. 21, 372-376.

El-Kalla, I.L. (2005). Error Analysis of Adomian Series Solution to a Class of Nonlinear Differential Equations. Applied Mathematics E- Notes. No. 7, 214 -221.

Hochstadt, H.,.(1973). Integral Equations. Wiley, New York.

Polyanin, A.D.,& Manzhirov, A.V.(2008). Handbook of Integral Equations. Second Edition. Chapman Hall/CRC. London.

Ross, S.L.(2010). Diferential Equation Third ed. John Wiley and Sons. New Delhi.

Waz-waz,I.L.(2011). Linear and Nonlinear Integral Equations. Higher Education Press. Beijing.