

PELABELAN TOTAL TAK REGULER SISI PADA GRAF DIRECTION, GRAF DIRECTION RIGHT, DAN GRAF HEART

Juli Setiawati¹, Meryta Febrilian², Darma Ekawati³

Universitas Sulawesi Barat^{1,2,3}

Email: julisetiawati22@gmail.com¹ merytaff@unsulbar.ac.id²,
darmaekawati@unsulbar.ac.id³

Corresponding Author: Juli Setiawati email: julisetiawati22@gmail.com

Abstrak. Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu bilangan bulat positif. Graf dapat dituliskan dengan $G = (V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ merupakan himpunan titik tak kosong dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi. Suatu pemetaan $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ untuk suatu bilangan bulat k , disebut pelabelan k total tak reguler sisi jika untuk setiap dua sisi $e_1 = u_1v_1$ dan $e_2 = u_2v_2$ yang berbeda, memiliki bobot sisi yang berbeda, yakni $wt_f(e_1) = wt_f(e_2)$. Nilai k terkecil pada pelabelan k total tak reguler sisi disebut sebagai kekuatan total tak reguler sisi pada graf G dan disimbolkan dengan $tes(G)$. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf direction, graf direction right, dan graf heart serta melabeli graf tersebut menggunakan pelabelan total tak reguler sisi. Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi literatur. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh pola pelabelan dan nilai kekuatan total tak reguler sisi dari ketiga graf tersebut, yang berturut-turut mempunyai nilai $tes(D_n) = 6n + 1$, $tes(Dr_n) = 3n + 1$, dan $tes(H_n) = 4n + 1$, untuk $n \geq 1$.

Kata Kunci: kekuatan total tak reguler sisi, pelabelan total tak reguler sisi, graf direction, graf direction right, graf heart.

Abstract. Graph labeling is a function that assigns graph elements to a positive. Graph can be written as $G = (V(G), E(G))$ where $V(G)$ is the nonempty set of vertices and $E(G)$ is the set of edges. The map $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ for some positive integer k , is called an edge irregular total k -labeling where each two edges $e_1 = u_1v_1$ and $e_2 = u_2v_2$, having distinct weights, that are $wt_f(e_1) = wt_f(e_2)$. The minimum k value on the edge irregular total k -labeling is called total edge irregularity strength of graph G and denoted by $tes(G)$. The purpose of this study is to determine the value total edge irregularity strength on direction graph, the direction right graph, and the heart graph and to label the graph using the edge irregular total labeling. The method used in writing this final project is literature study. Based on the results of the research, the labeling pattern and the value of the irregular total strength of the edges of the three graphs are obtained, which have a value of $tes(D_n) = 6n + 1$, $tes(Dr_n) = 3n + 1$, and $tes(H_n) = 4n + 1$, for $n \geq 1$.

Keywords: total edge irregularity strength, edge irregular total labeling, direction graph, direction right graph, heart graph.

A. Pendahuluan

Matematika diskrit merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mengkaji tentang teori graf. Konsep teori graf pertama kali diperkenalkan Leonhard Euler, seorang matematikawan asal Swiss pada tahun 1736 saat memikirkan kemungkinan untuk melalui ketujuh jembatan Königsberg pada sungai Pregel di Rusia masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan. Euler memodelkan permasalahan ini ke dalam graf, dimana daratan yang dihubungkan oleh jembatan dinyatakan sebagai titik dan jembatan penghubungnya dinyatakan sebagai sisi. Solusi yang dikemukakan oleh Euler yaitu tidak mungkin melalui ketujuh jembatan masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat asal keberangkatan jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap (Munir, 2010).



Suatu graf G terdiri dari himpunan titik berhingga yang tidak boleh kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yakni himpunan pasangan tidak terurut dari elemen-elemen $V(G)$. Jadi, suatu graf G merupakan pasangan terurut dari himpunan $V(G)$ dan $E(G)$. Selanjutnya dapat ditulis dengan $G = (V(G), E(G))$. Titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, bilangan bulat positif, serta gabungan dari keduanya. Lebih lanjut, untuk setiap sisi di G yang menghubungkan titik u dan v cukup ditulis dengan uv atau dinyatakan dengan simbol $e_1, e_2, \dots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dan titik v , maka e dapat dituliskan sebagai $e = uv$. (Sancoko, dkk. 2017)

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memasangkan elemen-elemen graf berupa titik atau sisi ke suatu bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan tersebut berupa himpunan titik maka pelabelan ini disebut pelabelan titik, jika domain dari pemetaan tersebut berupa himpunan sisi maka pelabelan ini disebut pelabelan sisi, sedangkan jika domain dari pemetaan tersebut berupa gabungan himpunan titik dan sisi maka pelabelan ini disebut pelabelan total (Wallis, 2001). Telah banyak jenis pelabelan graf yang dikaji, diantaranya pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, dan lain-lain. Kemudian (Gallian, 2017) juga telah melakukan survei yang lebih lengkap tentang pelabelan graf, hasil survei tersebut memberikan informasi yang sangat berguna terkait jenis-jenis pelabelan apa saja yang telah ditemukan.

Pada tahun 2007, Bača dkk. memperkenalkan jenis pelabelan yang didasarkan pada pelabelan total dan mempunyai dua tipe pelabelan, yakni pelabelan total tak reguler sisi dan pelabelan total tak reguler titik. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf, pelabelan f disebut pelabelan- k total tak reguler sisi pada G jika untuk setiap dua sisi e_1 dan e_2 yang berbeda, memiliki bobot sisi yang berbeda yaitu $wt_f(e_1) \neq wt_f(e_2)$. Lebih lanjut, bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tak reguler sisi dinamakan dengan nilai kekuatan total tak reguler sisi graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$.

Penelitian yang dilakukan oleh (Bača, dkk. 2007) juga menemukan batas bawah nilai kekuatan total tak reguler sisi untuk sebarang graf $G = (V(G), E(G))$ yaitu $tes(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil \right\}$ dimana $\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum pada graf G . Kemudian (Ivančo, dkk. 2006) menduga $tes(G)$ untuk sebarang graf yaitu $tes(G) = \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil \right\}$.

Pendugaan yang dilakukan (Ivančo, dkk. 2006) belum dapat dibuktikan kebenarannya untuk sebarang graf. Oleh karena itu, banyak peneliti mencoba membuktikan untuk suatu graf khusus. Misalnya, Ivančo, dan Jendrol membuktikan pada graf pohon, sementara Jendrol dkk. juga membuktikan pada graf lengkap dan graf bipartit lengkap. Kemudian Indriati dkk. meneliti tes graf *web* dan graf-graf terkait, Putra dan Susanti meneliti graf *theta* seragam terpusat, dan Susanti dkk. meneliti graf *staircase* dan graf-graf terkait (Khotimah, dkk. 2019). Berdasarkan latar belakang, paper ini menunjukkan nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf *direction* ke n , graf *direction right* ke n , dan graf *heart* ke n .

B. Metode Penelitian

Penelitian merupakan penelitian studi literatur untuk menentukan pelabelan total tak reguler sisi pada graf *direction*, graf *direction right*, dan graf *heart*. Adapun prosedur penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut.

1. Menelusuri pustaka berupa buku-buku referensi dengan judul “Matematika Diskrit”, “Teori Graf”, “*Magic Graph*”, dan “*Introduction to Graph Theory*”, serta artikel dengan judul “*A Dynamic Survey of Graph Labeling*”, dan “*Magic Valuations of Finite Graphs*”. Serta



- mengkaji konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan graf dan pelabelan pada graf khususnya pelabelan total tak reguler.
2. Mempelajari dan mengkaji beberapa hasil penelitian tentang pelabelan total tak reguler sisi pada graf dalam beberapa artikel yaitu “On Irregular Total Labellings”, “Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari graf tangga Permata”, “Total edge irregularity strength of trees”, “Kekuatan Total tak Reguler Sisi Graf *Double Fan* dan Graf-Graf Terkait Graf *Double Fan*”, dan “Kekuatan Tak Reguler Sisi Total pada Graf *Umbrella* dan Graf Fraktal”.
 3. Mencari bentuk graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan total tak reguler sisi
 4. Menemukan graf-graf yang akan dilabeli yaitu graf *direction*, graf *direction right*, dan graf *heart*.
 5. Menentukan nilai kekuatan tak reguler sisi untuk graf *direction* 1, graf *direction* 2, graf *direction* 3 hingga graf *direction* 5, dengan aturan pelabelan total tak reguler sisi.
 6. Melabeli graf *direction* 1, graf *direction* 2, graf *direction* 3, hingga graf *direction* 5, berdasarkan nilai kekuatan tak reguler sisi yang telah diperoleh.
 7. Mengecek kembali aturan pelabelan total tak reguler sisi untuk graf *direction* 1 hingga graf *direction* 5.
 8. Membuat rumus umum untuk graf *direction* ke n . Mengulang kembali langkah 5 hingga langkah 8 untuk graf *direction right* dan graf *heart*.

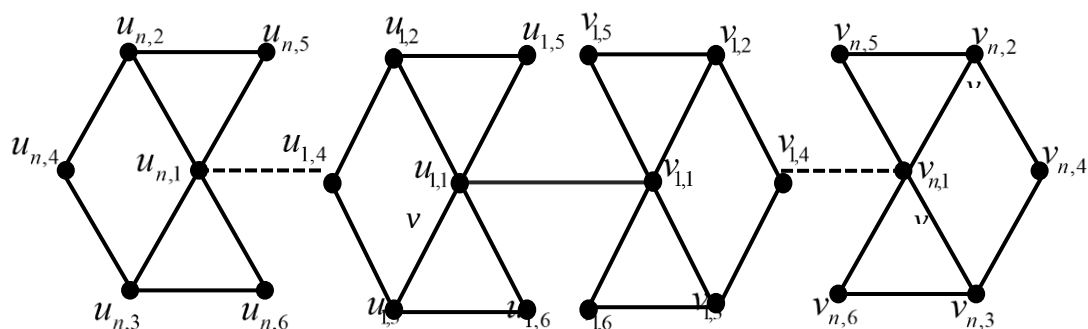
C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

1. Graf *direction*

Penulisan Graf *direction* merupakan graf yang diperoleh dengan cara menggabungkan graf cycle C_4 , C_3 , dan sebuah sisi. Berikut diberikan definisinya. Graf *direction* adalah graf yang disusun dari graf C_4 sebanyak 2 buah yang masing-masing diapit oleh graf C_3 sebanyak 2 buah pada kedua sisi yang *incident* di titik $u_{1,1}$ dan titik $v_{1,1}$ kemudian dibentuk menyerupai anak panah dua arah yang dihubungkan oleh sebuah sisi pada titik $u_{1,1}$ dan $v_{1,1}$.

Setelah diberikan definisi dari graf *direction*, selanjutnya diberikan definisi graf *direction* ke- n sebagai berikut. Graf *direction* ke- n dinotasikan dengan D_n , adalah graf yang disusun dari graf C_4 sebanyak 2 buah yang masing-masing diapit oleh graf C_3 sebanyak 2 buah pada kedua sisi yang *incident* di titik $u_{i,1}$ dan titik $v_{i,1}$ kemudian dibentuk menyerupai anak panah dua arah yang masing-masing dihubungkan oleh sebuah sisi pada titik $u_{i-1,4}$ dan $u_{i,2}$ serta titik $v_{i-1,4}$ dan $v_{i,2}$, dimana $1 < i \leq n$.

Ilustrasi dari graf *direction* D_n dapat dilihat pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1 Graf *direction* D_n

Pada Gambar 1 diperoleh $(D_n) = \{u_{i,j}, v_{i,j} | 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, \dots, 6\}$ yang merupakan himpunan titik pada graf D_n dan banyaknya titik dari $|V(D_n)| = 12n$ dan banyaknya sisi dari $|E(D_n)| = 18n - 1$. Lebih lanjut, berikut ini diberikan teorema mengenai kekuatan total tak reguler sisi dari graf *direction*.

Misalkan D_n merupakan graf *direction* ke- n , dengan $n \geq 1$ maka $tes(D_n) = 6n + 1$.

Bukti: Diketahui bahwa untuk $n \geq 1$,

$$tes(D_n) = maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(D_n)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(D_n) + 1}{2} \right\rceil \right\}.$$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan k total tak reguler sisi dengan

$$k = \left\lceil \frac{|E(D_n)| + 2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{18n + 1}{3} \right\rceil = 6n + 1.$$

Kemudian dikonstruksikan pelabelan total f sebagai berikut:

$$f(u_{1,1}v_{1,1}) = 1$$

$$f(u_{i,5}) = f(u_{i,2}) = f(u_{i,4}) = f(u_{i,3}) = f(u_{i,6}) = f(u_{i,2}u_{i,5}) = 6i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(u_{i,2}u_{i,4}) = f(v_{i,5}v_{i,2}) = 6i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(u_{i,1}) = f(u_{i,1}u_{i,5}) = f(u_{i,4}u_{i,3}) = f(v_{i,2}v_{i,4}) = 6i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(u_{i,1}u_{i,2}) = f(u_{i,3}u_{i,6}) = f(v_{i,1}v_{i,5}) = f(v_{i,4}v_{i,3}) = 6i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(u_{i,1}u_{i,3}) = f(v_{i,3}v_{i,6}) = f(v_{i,1}v_{i,2}) = f(v_{i,5}) = f(v_{i,2}) = f(v_{i,4}) = f(v_{i,3}) = f(v_{i,6}) = 6i - 1,$$

untuk $1 \leq i \leq n$

$$f(u_{i,1}u_{i,6}) = f(v_{i,1}v_{i,3}) = 6i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(v_{i,1}) = f(v_{i,1}v_{i,6}) = 6i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(u_{i-1,4}u_{i,1}) = 6i - 2, \text{ untuk } 1 < i \leq n$$

$$f(v_{i-1,4}v_{i,1}) = 6i - 1, \text{ untuk } 1 < i \leq n$$

Oleh karena label paling besar dari titik dan sisi pada graf *direction* adalah $k = 6n + 1$, maka dapat disimpulkan bahwa f merupakan pelabelan k total.

Lebih lanjut, untuk menunjukkan bahwa f merupakan pelabelan k total tak reguler sisi, maka akan ditunjukkan bahwa setiap sisi yang berbeda memiliki bobot yang berbeda.

$$wt_f(u_{1,1}v_{1,1}) = 11$$

$$wt_f(u_{i,5}u_{i,2}) = 18i - 15, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(u_{i,2}u_{i,4}) = 18i - 14, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(u_{i,4}u_{i,3}) = 18i - 13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(u_{i,3}u_{i,6}) = 18i - 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(u_{i,1}u_{i,5}) = 18i - 11, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(u_{i,1}u_{i,2}) = 18i - 10, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(u_{i,1}u_{i,3}) = 18i - 9, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$



$$\begin{aligned} wt_f(u_{i,1}u_{i,6}) &= 18i - 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,5}v_{i,2}) &= 18i - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,2}v_{i,4}) &= 18i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,4}v_{i,3}) &= 18i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,3}v_{i,6}) &= 18i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,1}v_{i,5}) &= 18i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,1}v_{i,2}) &= 18i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,1}v_{i,3}) &= 18i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(v_{i,1}v_{i,6}) &= 18i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_f(u_{i-1,4}u_{i,1}) &= 18i - 16, \text{ untuk } 1 < i \leq n \\ wt_f(v_{i-1,4}v_{i,1}) &= 18i - 7, \text{ untuk } 1 < i \leq n. \end{aligned}$$

Setiap bobot sisi pada graf *direction* D_n membentuk barisan bilangan bulat dari $18i - 15$ sampai dengan $18i + 1$. Oleh karena f merupakan pelabelan k total dan untuk setiap dua sisi yang berbeda pada D_n memiliki bobot sisi yang berbeda, maka f merupakan pelabelan k total tak reguler sisi, dengan label terbesarnya adalah $k = 6n + 1$. Sehingga, terbukti bahwa untuk $n \geq 1$, $tes(D_n) = 6n + 1$. ■

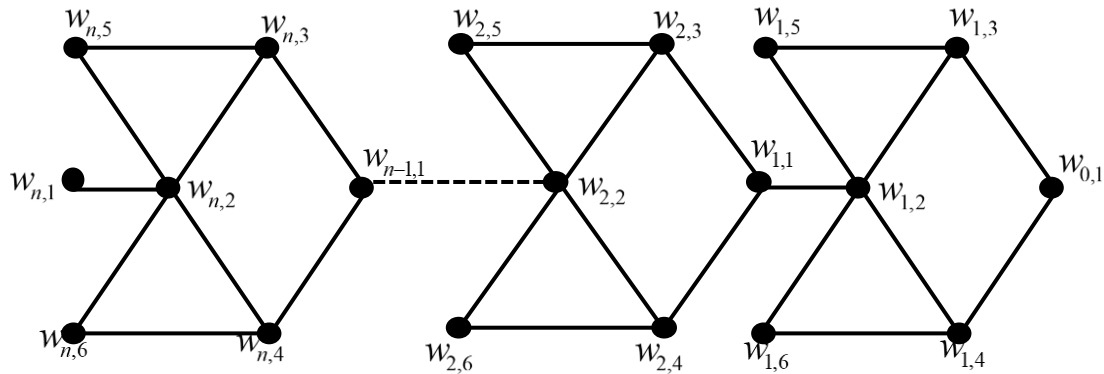
2. Graf *direction right*

Penulisan nomor gambar dimulai dari angka 1 dan seterusnya hingga gambar terakhir. Ukuran font dalam gambar sedapat mungkin yang dapat terbaca dengan jelas. Gambar, skema, grafik, diagram, atau foto tidak boleh terpotong oleh halaman. Gambar tertentu yang menggunakan warna sebagai pembeda, agar dicetak berwarna.

Graf *direction right* merupakan graf yang memuat setengah bagian dari graf *direction* yang mengarah ke kanan. Graf *direction right* adalah graf yang disusun dari graf C_4 yang diapit oleh graf C_3 sebanyak 2 buah pada kedua sisi yang *incident* di titik $w_{1,2}$ kemudian dibentuk menyerupai anak panah mengarah ke kanan yang dihubungkan oleh sebuah sisi pada titik $w_{1,2}$ dan $w_{1,1}$.

Setelah diberikan definisi dari graf *direction right*, selanjutnya diberikan definisi graf *direction right* ke- n sebagai berikut. Graf *direction right* ke- n dinotasikan dengan Dr_n adalah graf yang disusun dari graf C_4 yang diapit oleh graf C_3 sebanyak 2 buah pada kedua sisi yang *incident* di titik $w_{i,2}$ kemudian dibentuk menyerupai anak panah mengarah ke kanan yang dihubungkan oleh sebuah sisi pada titik $w_{i,2}$ dan $w_{i,1}$, dimana $1 < i \leq n$.

Ilustrasi dari graf *direction right* Dr_n dapat dilihat pada Gambar 2 berikut ini.



Gambar 2 Graf *direction right* Dr_n

Gambar 2 menunjukkan bahwa $V(Dr_n) = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, \dots, 6\}$ yang merupakan himpunan titik pada graf Dr_n dan memiliki titik sebanyak $|V(Dr_n)| = 6n$ serta sisi sebanyak $|E(Dr_n)| = 9n$. Untuk kekuatan total tak reguler sisi pada graf *direction right* diberikan pada teorema 4.5 berikut ini.

Misalkan Dr_n merupakan graf *direction right* ke- n , dengan $n \geq 1$ maka $tes(Dr_n) = 3n + 1$.

Bukti: Diketahui bahwa untuk $n \geq 1$,

$$tes(Dr_n) = maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(Dr_n)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(Dr_n) + 1}{2} \right\rceil \right\}.$$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan k total tak reguler sisi dengan

$$k = \left\lceil \frac{|E(Dr_n)| + 2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{9n + 2}{3} \right\rceil = 3n + 1.$$

Kemudian dikonstruksikan pelabelan total f sebagai berikut:

$$f(w_{i-1,1}) = 1$$

$$f(w_{i,3}) = f(w_{i,3}w_{i-1,1}) = f(w_{i,4}w_{i,6}) = f(w_{i,4}w_{i-1,1}) = 3i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(w_{i,4}) = f(w_{i,5}) = f(w_{i,2}w_{i,3}) = f(w_{i,2}w_{i,4}) = f(w_{i,3}w_{i,5}) = 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(w_{i,6}) = f(w_{i,2}w_{i,1}) = f(w_{i,2}w_{i,5}) = f(w_{i,2}w_{i,6}) = 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(w_{i,2}) = f(w_{i,1}) = 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Jelas bahwa label titik dan sisi pada graf *direction right* $tes(Dr_n)$ dengan pelabelan f , mempunyai label paling besar $k = 3n + 1$. Oleh sebab itu, diperoleh bahwa f merupakan pelabelan k total dengan label terbesarnya adalah $k = 3n + 1$.

Selanjutnya, untuk melihat apakah f merupakan pelabelan k total tak reguler sisi, maka akan ditunjukkan bahwa setiap sisi yang berbeda memiliki bobot yang berbeda.

$$wt_f(w_{i,2}w_{i,1}) = 9i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i,2}w_{i,6}) = 9i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i,2}w_{i,3}) = 9i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i,2}w_{i,4}) = 9i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i,2}w_{i,5}) = 9i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i,3}w_{i-1,1}) = 9i - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i,3}w_{i,5}) = 9i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i-1,1}w_{i,4}) = 9i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i,4}w_{i,6}) = 9i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

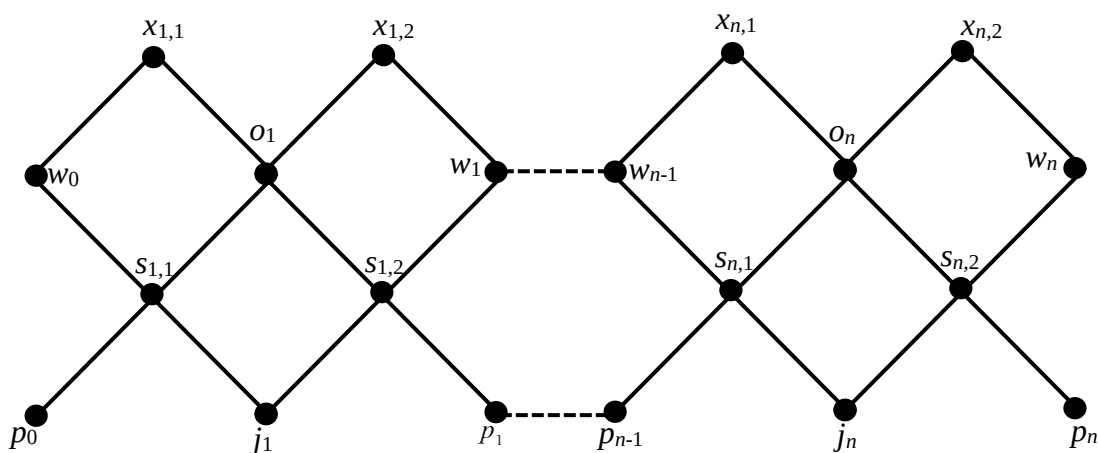
Terlihat bahwa setiap bobot sisi pada graf *direction right* Dr_n membentuk barisan bilangan bulat dari $9i - 6$ sampai dengan $9i + 2$. Oleh karena f merupakan pelabelan k total dan untuk setiap dua sisi yang berbeda pada Dr_n memiliki bobot sisi yang berbeda, maka f merupakan pelabelan k total tak reguler sisi, dengan label terbesarnya adalah $k = 3n + 1$. Sehingga, terbukti bahwa untuk $n \geq 1$, $tes(Dr_n) = 3n + 1$. ■

3. Graf heart

Graf *heart* adalah graf yang terbentuk dari gabungan tiga buah graf C_4 dan dua buah sisi kemudian disusun menyerupai bentuk *heart*. Berikut diberikan definisinya. Graf *heart* adalah graf yang disusun dari graf C_4 yang diapit oleh 2 buah graf C_4 lainnya pada kedua sisi yang *incident* di titik o_1 , kemudian dibentuk menyerupai *heart* dan diberikan 2 buah sisi pada masing-masing titik $s_{1,1}$ dan p_0 serta titik dan p_1 .

Setelah diberikan definisi dari graf *heart*, selanjutnya diberikan definisi graf *heart* ke- n sebagai berikut. Graf *heart* ke- n dinotasikan dengan H_n , adalah graf yang disusun dari graf C_4 yang diapit oleh 2 buah graf C_4 lainnya pada kedua sisi yang *incident* di titik o_i , kemudian dibentuk menyerupai *heart* dan diberikan 2 buah sisi pada masing-masing titik $s_{i,1}$ dan p_{i-1} serta titik $s_{i,2}$ dan p_i , dimana $1 < i \leq n$.

Ilustrasi dari graf *heart* H_n dapat dilihat pada Gambar 3 berikut ini.



Gambar 3 Graf heart H_n

Gambar 3 menunjukkan bahwa $V(H_n) = \{x_{i,t}, w_{i-1}, o_i, s_{i,t}, j_i, p_{i-1} | 1 \leq i \leq n, t = 1, 2\}$ yang merupakan himpunan titik pada graf H_n dan memiliki titik sebanyak $|V(H_n)| = 18n+2$ serta sisi sebanyak $|E(H_n)| = 12n$. Lebih lanjut, berikut ini diberikan teorema mengenai kekuatan total tak reguler sisi dari graf *heart*.

Misalkan H_n merupakan graf *heart* ke- n , dengan $n \geq 1$ maka $tes(H_n) = 4n + 1$.

Bukti: Diketahui bahwa untuk $n \geq 1$,

$$tes(H_n) = maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(H_n)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(H_n) + 1}{2} \right\rceil \right\}.$$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan k total tak reguler sisi dengan

$$k = \left\lceil \frac{|E(H_n)| + 2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{12n + 2}{3} \right\rceil = 4n + 1.$$

Kemudian dikonstruksikan pelabelan total f sebagai berikut:

$$f(w_0) = 1$$

$$f(p_0) = 1$$

$$f(x_{i,1}) = f(x_{i,1}w_{i-1}) = f(w_{i-1}s_{i,1}) = 4i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(s_{i,1}) = f(x_{i,1}o_i) = f(o_i s_{i,1}) = f(o_i s_{i,2}) = f(s_{i,1}p_{i-1}) = 4i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(x_{i,2}) = f(o_i) = f(j_i) = f(x_{i,2}o_i) = f(w_{i,2}s_{i,2}) = f(s_{i,2}j_i) = f(s_{i,1}j_i) = 4i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(x_{i,2}w_i) = f(s_{i,2}p_i) = 4i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(w_i) = f(s_{i,2}) = f(p_i) = 4i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Jelas bahwa label titik dan sisi pada graf *heart* H_n dengan pelabelan f , mempunyai label paling besar $k = 4n+1$. Oleh sebab itu, diperoleh bahwa f merupakan pelabelan k total dengan label terbesarnya adalah $k = 4n+1$.

Selanjutnya, untuk melihat apakah f merupakan pelabelan k total tak reguler sisi, maka akan ditunjukkan bahwa setiap sisi yang berbeda memiliki bobot yang berbeda.

$$wt_f(x_{i,1}w_{i-1}) = 12i - 9, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_{i-1}s_{i,1}) = 12i - 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(s_{i,1}p_{i-1}) = 12i - 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(x_{i,1}o_i) = 12i - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(o_i s_{i,1}) = 12i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(s_{i,1}j_i) = 12i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(x_{i,2}o_i) = 12i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(o_i s_{i,2}) = 12i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(s_{i,2}j_i) = 12i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(x_{i,2}w_i) = 12i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$wt_f(w_i s_{i,2}) = 12i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$wt_f(s_{i,2}p_i) = 12i + 2$, untuk $1 \leq i \leq n$.

Setiap bobot sisi pada graf *heart* H_n membentuk barisan bilangan bulat dari $12i-9$ sampai dengan $12i + 2$. Oleh karena f merupakan pelabelan k total dan untuk setiap dua sisi yang berbeda pada H_n memiliki bobot sisi yang berbeda, maka f merupakan pelabelan k total tak reguler sisi, dengan label terbesarnya adalah $k = 4n+1$. Sehingga, terbukti bahwa untuk $n \geq 1$ $tes(H_n) = 4n + 1$. ■

D. Kesimpulan

Nilai kekuatan total tak reguler sisi dari graf *direction* $tes(D_n) = 6n + 1$, graf *direction right* $tes(Dr_n) = 3n + 1$, dan graf *heart* $tes(H_n) = 4n + 1$. Graf *direction*, graf *direction right*, dan graf *heart* dapat dilabeli dengan pelabelan total tak reguler sisi

DAFTAR PUSTAKA

- Bača, M., Jendrol', S., dkk. (2007). On Irregular Total Labellings. *Journal of Discrete Mathematics*, Vol. 307, hal. 1378–1388.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications*. New York: Elsevier Science Publishing.
- Gallian, J. A. (2017). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Vol. 18, #DS6.
- J., & Jendrol', S. (2006). Total Edge Irregularity Strength of Trees. *Journal of Discussiones Mathematicae*, Vol. 26, hal. 449–456.
- Khotimah, H., dkk. (2019). Kekuatan Total Tak Reguler Sisi Graf Double Fan dan Graf-Graf Terkait Graf Double Fan. *Jurnal Matematika Thales (JMT)*, Vol. 01-01.
- Marsudi. (2016). *Teori Graf*, Ed. 1. Malang: Universitas Brawijaya Press.
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*, Ed. 3. Bandung: Informatika Bandung.
- Sancoko, S. D., dkk. (2017). Kekuatan Tak Reguler Sisi Total Pada Graf Umbrella Dan Graf Fraktal, hal 37–42.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graph*, Birkhauser, Boston.
- Wilson, R.J. (1996). *Introduction to Graph Theory*, Ed. 4. Mala: Longman.

