

RUANG BARISAN SELISIH YANG DIBANGKITKAN OLEH FUNGSI ORLICZ

Khaerani Nurdin¹, Supama²

Program Studi Magister Matematika, FMIPA-UGM^{1,2}

Email: nurdinkhaerani@gmail.com¹, supama@ugm.ac.id²

Abstrak. Pada tulisan ini, dibahas fungsi Orlicz dan ruang barisan yang dibangkitkan olehnya. Selanjutnya, untuk sebarang fungsi Orlicz M , didefinisikan ruang barisan selisih $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ serta diselidiki sifat-sifat yang berlaku pada ruang tersebut.

Kata Kunci: Seminorma, Paranorma, Ruang Barisan Selisih, Fungsi Orlicz.

Abstract. In this paper, we discuss about Orlicz functions and sequence spaces generated by them. Further, for any Orlicz function M , we construct the space $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ and observe their properties.

Keywords: Seminorm, Paranorm, Difference Sequence Spaces, Orlicz Function.

A. Pendahuluan

Ruang Orlicz merupakan suatu perluasan dari ruang l_p dan merupakan contoh dari ruang Banach (Leonard, 2007). Dalam perkembangannya, ruang Orlicz sudah banyak dikaji oleh para ahli termasuk aplikasinya. Rao dan Ren pada tahun 2002 telah mengkaji beberapa aplikasi ruang Orlicz, antara lain aplikasi ruang Orlicz pada analisis prediksi, analisis stokastik, *nonlinear* PDEs, serta aplikasi *Miscellaneous*. Ruang Orlicz juga dapat diaplikasikan pada bidang geometri, dalam hal ini *best approximation* dan *optimal control theory* (Chen, 1996).

Ruang barisan Orlicz merupakan kejadian khusus dari ruang Orlicz. Tulisan Lindenstrauss dan Tzafriri (1971) membahas secara detail tentang ruang barisan Orlicz dan menyelesaikan permasalahan struktural dan esensial dalam ruang Banach. Selanjutnya, Raj dan Sharma (2013) memperkenalkan ruang barisan baru pada ruang seminorma yang dibangkitkan oleh fungsi Orlicz. Pada tulisan ini, akan dibahas tentang ruang barisan selisih pada ruang seminorma yang dibangkitkan oleh fungsi Orlicz dan sifat-sifat yang berlaku.

Berikut beberapa teori dasar yang digunakan sebagai acuan untuk penelitian ini.

Definisi 1. (Yosida, 1968)

Diberikan X ruang linear. Fungsi $q: X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi dua sifat berikut:

(S1) $q(\alpha x) = |\alpha|q(x)$, untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$,

(S2) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$, untuk setiap $x, y \in X$,

disebut seminorma pada X . Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu seminorma q , ditulis (X, q) , disebut ruang seminorma (seminorm space).

Definisi 2. (Aiyub, 2013)

Diberikan ruang linear X . Fungsi $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut paranorma, jika memenuhi:

(P1) $p(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in X$,

(P2) $p(-x) = p(x)$, untuk setiap $x \in X$,

(P3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, untuk setiap $x, y \in X$, dan

(P4) jika (λ_n) barisan skalar dengan $\lambda_n \rightarrow \lambda$ (untuk $n \rightarrow \infty$) dan (x_n) barisan vektor dengan $p(x_n - x) \rightarrow 0$ (untuk $n \rightarrow \infty$), maka $p(\lambda_n x_n - \lambda x) \rightarrow 0$ (untuk $n \rightarrow \infty$).



Lebih lanjut, jika $p(x) = 0$ berakibat $x = 0$, maka p disebut paranorma total dan (X, p) disebut ruang paranorma total.

Definisi 3. (Chen, 1996)

Fungsi $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ disebut fungsi Orlicz, jika memenuhi:

(O1) fungsi M kontinu,

(O2) fungsi M naik pada $[0, \infty)$, yaitu jika untuk setiap $x, y \in [0, \infty)$ dengan $x \leq y$ maka $M(x) \leq M(y)$.

(O3) fungsi M konveks,

(O4) $M(0) = 0$,

(O5) $M(x) > 0$ untuk $x > 0$, dan

(O6) $M(x) \rightarrow \infty$ untuk $x \rightarrow \infty$.

Misalkan lambang ω menyatakan himpunan semua barisan bilangan real $\bar{x} = (x_k)$. Diberikan fungsi Orlicz M . Didefinisikan:

$$l_M = \left\{ \bar{x} \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ untuk suatu } \rho > 0 \right\}.$$

Ruang l_M merupakan ruang linear atas $\mathbb{R}$. Selanjutnya, dapat ditunjukkan fungsi $\|\cdot\|: l_M \rightarrow \mathbb{R}^+$, dengan

$$\|\bar{x}\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

merupakan norma. Oleh karena itu, ruang l_M merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|\cdot\|$.

Definisi 4. (Krasnolselskiy dan Rutickii, 1961)

Fungsi Orlicz M memenuhi kondisi Δ_2 jika untuk setiap konstanta $L > 1$, terdapat konstanta $K(L) > 0$ sedemikian sehingga $M(Lu) \leq K(L)M(u)$, untuk semua $u \geq 0$.

Ketaksamaan sebagaimana dinyatakan dalam Lema berikut akan digunakan dalam pembuktian selanjutnya.

Lema 1. Diberikan $\bar{p} = (p_k)$ barisan bilangan real non-negatif yang terbatas. Jika $H = \sup_k p_k$ dan $K = \max\{1, 2^{H-1}\}$, maka $|a_k + b_k|^{p_k} \leq K\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\}$, untuk semua $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ dan untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

B. Metodologi Penelitian

Terlebih dahulu dikaji teori-teori penunjang yang akan digunakan untuk pemecahan masalah pada penelitian ini, antara lain pendefinisian fungsi Orlicz M , ruang seminorma, dan ruang paranorma. Selanjutnya, membentuk $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ yang merupakan ruang barisan yang dibangkitkan oleh fungsi Orlicz dan menyelidiki sifat-sifat yang berlaku, diantaranya $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ merupakan ruang paranorma, solid, dan monoton. Lebih lanjut, juga diselidiki sifat inklusi dari kejadian khusus yang dibentuk dari ruang $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Misalkan X ruang linear bilangan real. $S(X)$ dinotasikan sebagai ruang linear dari semua barisan $\bar{x} = (x_k)$ dengan $\bar{x} \in X$. Diberikan $\bar{\lambda} = (\lambda_x)$ barisan skalar dan $\bar{x} \in S(X)$ maka $\bar{\lambda} \cdot \bar{x} = (\lambda_x x_k)$. Misalkan $S(X)$ ruang seminorma atas $\mathbb{R}$ dengan q seminorma, U adalah himpunan semua barisan $\bar{u} = (u_k)$ sedemikian sehingga $u_k \neq 0$, $\bar{p} = (p_k)$ adalah barisan



bilangan real non-negatif dan M fungsi Orlicz. Pada bagian ini, didefinisikan ruang barisan sebagai berikut.

$$l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s) = \left\{ \bar{x} \in S(X) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty, \text{ untuk suatu } \rho > 0 \right\}.$$

Jika $\bar{p} = (p_k) = 1$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$, maka

$$l_M(\Delta^m, \bar{u}, q, s) = \left\{ \bar{x} \in S(X) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right) < \infty, \text{ untuk suatu } \rho > 0 \right\}.$$

Jika $s = 0$, maka

$$l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q) = \left\{ \bar{x} \in S(X) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty, \text{ untuk suatu } \rho > 0 \right\}.$$

Jika $\bar{p} = (p_k) = 1$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$ dan $s = 0$, maka

$$l_M(\Delta^m, \bar{u}, q) = \left\{ \bar{x} \in S(X) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right) < \infty, \text{ untuk suatu } \rho > 0 \right\}.$$

Jika $s = 0$, $q(\bar{x}) = |\bar{x}|$ dan $X = \mathbb{R}$, maka

$$l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}) = \left\{ \bar{x} \in S(X) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(\frac{|u_k \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right)^{p_k} < \infty, \text{ untuk suatu } \rho > 0 \right\}.$$

Selanjutnya, diselidiki beberapa hubungan inklusi antara ruang barisan yang telah didefinisikan di atas serta sifat-sifat lainnya yang berlaku.

Teorema 1. Jika M adalah fungsi Orlicz dan $\bar{p} = (p_k)$ adalah barisan terbatas bilangan real positif, maka $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ merupakan ruang linear atas lapangan $\mathbb{R}$.

Bukti. Diberikan $\bar{x} = (x_k)$, $\bar{y} = (y_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Terdapat $\rho_1 > 0$ dan $\rho_2 > 0$ sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty$$

dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho_2} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Dapat dipilih $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$. Karena M naik, konveks, dan q seminorma, maka dengan menggunakan Lema 1, diperoleh:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k (\alpha \Delta^m x_k + \beta \Delta^m y_k)}{\rho_3} \right) \right) \right)^{p_k} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{\alpha u_k \Delta^m x_k}{\rho_3} \right) + q \left(\frac{\beta u_k \Delta^m y_k}{\rho_3} \right) \right) \right)^{p_k} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right)^{p_k} \end{aligned}$$



$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right)^{p_k}$$

$$\leq K \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right)^{p_k} + K \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty,$$

dengan $K = \max(1, 2^{H-1})$, $0 \leq p_k \leq \sup p_k = H$. Jadi, $\alpha \bar{x} + \beta \bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$. Oleh karena itu, $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ merupakan ruang linear. ■

Teorema 2. Jika M fungsi Orlicz dan $\bar{p} = (p_k)$ barisan bilangan real non-negatif yang terbatas, maka $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ merupakan ruang paranorma dengan paranorma yang didefinisikan dengan

$$g(\bar{x}) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \rho > 0 \text{ sehingga } \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

dengan $H = \max \left\{ 1, \sup_k p_k \right\}$.

Bukti. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa g paranorma.

- (i) Dari definisi, jelas bahwa $g(\bar{x}) \geq 0$, untuk setiap $\bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$.
- (ii) Karena untuk sebarang $\rho > 0$ berlaku:

$$q \left(\frac{u_k \Delta^m (-x_k)}{\rho} \right) = q \left(-\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) = q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right),$$

untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka

$$g(-\bar{x}) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \rho > 0 \text{ sehingga } \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m (-x_k)}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, \right.$$

$$\left. s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \rho > 0 \text{ sehingga } \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, \right.$$

$$\left. s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= g(-\bar{x}),$$

untuk setiap $\bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ dengan $H = \max \left\{ 1, \sup_k p_k \right\}$.

- (iii) Diambil sebarang $\bar{x} = (x_k)$ dan $\bar{y} = (y_k)$ anggota $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$. Misal ρ_1 dan ρ_2 adalah bilangan-bilangan real positif sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right)^{p_k} \leq 1$$

dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right)^{p_k} \leq 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa $g(\bar{x} + \bar{y}) \leq g(\bar{x}) + g(\bar{y})$, untuk setiap $\bar{x}, \bar{y}$ anggota $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$. Jika diambil $\rho = \rho_1 + \rho_2$, maka

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m (x_k + y_k)}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k + u_k \Delta^m y_k}{\rho_1 + \rho_2} \right) \right) \right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(\frac{1}{\rho_1 + \rho_2} q(u_k \Delta^m x_k + u_k \Delta^m y_k) \right) \right)^{p_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(\frac{1}{\rho_1 + \rho_2} q(u_k \Delta^m x_k) + q(u_k \Delta^m y_k) \right) \right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{q(u_k \Delta^m x_k)}{\rho_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{q(u_k \Delta^m y_k)}{\rho_2} \right) \right)^{p_k} \\ &\leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(\frac{q(u_k \Delta^m x_k)}{\rho_1} \right) \right)^{p_k} \\ &\quad + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(\frac{q(u_k \Delta^m y_k)}{\rho_2} \right) \right)^{p_k} \\ &\leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \cdot 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh:

$$g(\bar{x} + \bar{y}) \leq \rho^{\frac{p_n}{H}} = (\rho_1 + \rho_2)^{\frac{p_n}{H}} \leq (\rho_1)^{\frac{p_n}{H}} + (\rho_2)^{\frac{p_n}{H}}.$$

Jika $(\rho_1)^{\frac{p_n}{H}} + (\rho_2)^{\frac{p_n}{H}}$ diambil infimumnya, maka diperoleh:

$$g(\bar{x} + \bar{y}) \leq g(\bar{x}) + g(\bar{y}),$$

untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$.

- (iv) Diambil sebarang barisan (λ_n) di dalam $\mathbb{R}$ sehingga $\lambda_n \rightarrow \lambda$, untuk suatu $\lambda \in \mathbb{R}$. Diambil sebarang barisan $(\bar{x}_n)$ di dalam $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\bar{x}_n - \bar{x}) = 0,$$

untuk suatu $\bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $g(A(\bar{x}_n - \bar{x})) \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$, untuk setiap $A > 0$. Diambil sebarang $A > 0$, diperhatikan bahwa:

$$g(A(\bar{x}_n - \bar{x})) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \rho > 0 \text{ sehingga} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m (A(x_{k,n} - x_k))}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \rho > 0 \text{ sehingga} \right. \\
 & \quad \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{A u_k \Delta^m (x_{k,n} - x_k)}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= \inf \left\{ A \left(\frac{\rho}{A^{\frac{H}{p_n}}} \right)^{\frac{p_n}{H}} : \rho > 0 \text{ sehingga} \right. \\
 & \quad \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m (x_{k,n} - x_k)}{\frac{\rho}{A}} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\} \\
 &\leq \inf \left\{ A \left(\frac{\rho}{A} \right)^{\frac{p_n}{H}} : \frac{\rho}{A} > 0 \text{ sehingga} \right. \\
 & \quad \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m (x_{k,n} - x_k)}{\frac{\rho}{A}} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\} \\
 &= A \cdot \inf \left\{ \left(\frac{\rho}{A} \right)^{\frac{p_n}{H}} : \frac{\rho}{A} > 0 \text{ sehingga} \right. \\
 & \quad \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m (x_{k,n} - x_k)}{\frac{\rho}{A}} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}
 \end{aligned}$$

$= A \cdot g(\bar{x}_n - \bar{x}) \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $g((\lambda_n - \lambda)\bar{x}) \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$. Diambil sebarang $\epsilon \in (0, 1)$. Karena $\lambda_n \rightarrow \lambda$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku:

$$|\lambda_n - \lambda| < \frac{\epsilon}{M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) + 1},$$

sehingga untuk setiap $\rho \in \left(0, \epsilon^{\frac{H}{p_n}}\right)$, diperoleh:

$$\begin{aligned} M\left(q\left(\frac{u_k \Delta^m((\lambda_n - \lambda)x_k)}{\rho}\right)\right) &= M\left(q\left(\frac{(\lambda_n - \lambda)u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \\ &= M\left(|\lambda_n - \lambda| \cdot q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \\ &\leq M\left(\frac{\epsilon}{M\left(q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) + 1} \cdot q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{M\left(q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) + 1} M\left(q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) < \epsilon. \end{aligned}$$

Akibatnya, $g((\lambda_n - \lambda)\bar{x}) \leq \rho^{\frac{p_n}{H}} < \epsilon$, untuk setiap $n \geq n_0$. Jadi, $g((\lambda_n - \lambda)\bar{x}) \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$. Oleh karena itu, $g(A(\bar{x}_n - \bar{x})) \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$ dan $g((\lambda_n - \lambda)\bar{x}) \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$, maka

$$\begin{aligned} g(\lambda_n \bar{x}_n - \lambda \bar{x}) &= g(\lambda_n \bar{x}_n - \lambda_n \bar{x} + \lambda_n \bar{x} - \lambda \bar{x}) \\ &\leq g(\lambda_n(\bar{x}_n - \bar{x})) + g((\lambda_n - \lambda)\bar{x}) \\ &= g(|\lambda_n|(\bar{x}_n - \bar{x})) + g((\lambda_n - \lambda)\bar{x}) \\ &\leq g(B(\bar{x}_n - \bar{x})) + g((\lambda_n - \lambda)\bar{x}), \text{ untuk suatu } B > 0 \\ &\rightarrow 0, \text{ untuk } n \rightarrow \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.

- Jika $0 < p_k < t_k < \infty$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{t}, q)$.
- Jika $0 < p_k < t_k < \infty$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{t})$.
- $l_M(\Delta^m, \bar{u}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, q, s)$.
- $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$.

Bukti.

- Diambil sebarang $\bar{x} = (x_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q)$, maka terdapat $\rho > 0$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(M\left(q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Karena M fungsi naik dan $p_k < t_k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(M\left(q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \right)^{t_k} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(M\left(q\left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Dari sini, diperoleh $\bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{t}, q)$. Jadi, $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{t}, q)$.

- Diambil sebarang $\bar{x} = (x_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p})$, maka terdapat $\rho > 0$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(M\left(\frac{|u_k \Delta^m x_k|}{\rho}\right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Karena M fungsi naik dan $p_k < t_k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka



$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(\frac{|u_k \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right)^{t_k} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(\frac{|u_k \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Dari sini, diperoleh $\bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{t})$. Jadi, $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{t})$.

iii. Diambil sebarang $\bar{x} = (x_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, q)$, maka terdapat $\rho > 0$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right) < \infty.$$

Karena M fungsi naik dan $k^s \geq 1$, untuk setiap $s \geq 0$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right) < \infty.$$

Dari sini, diperoleh $\bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, q, s)$. Jadi, $l_M(\Delta^m, \bar{u}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, q, s)$.

iv. Diambil sebarang $\bar{x} = (x_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q)$, maka terdapat $\rho > 0$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Karena M fungsi naik dan $k^s \geq 1$, untuk setiap $s \geq 0$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Diperoleh $\bar{x} \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$. Jadi, $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$. ■

Akibat 1.

- i. Jika $0 < p_k \leq 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, q)$.
- ii. Jika $p_k \leq 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $l_M(\Delta^m, \bar{u}, q) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q)$.

Definisi 5. (Khan, dkk., 2021)

Ruang barisan E dikatakan solid jika untuk setiap barisan $\bar{x} = (x_k) \in E$ dan untuk setiap barisan skalar $\bar{\alpha} = (\alpha_k) \in \mathbb{R}$ dengan $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $(\alpha_k x_k) \in E$.

Teorema 4. Ruang barisan $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ solid.

Bukti. Diambil sebarang $\bar{x} = (x_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$, maka terdapat $\rho > 0$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty.$$

Diambil sebarang barisan skalar $\bar{\alpha} = (\alpha_k) \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena M fungsi naik, maka:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{\alpha_k u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(|\alpha_k| q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk sebarang $\bar{x} = (x_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ dan sebarang barisan skalar $\bar{\alpha} = (\alpha_k) \in \mathbb{R}$ dengan $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, berlaku:

$$(\alpha_k x_k) \in l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s).$$



Jadi, ruang $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ solid. ■

Definisi 6. (Khan, dkk., 2021)

Diberikan himpunan $K = \{k_i \in \mathbb{N}: k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$. Ruang barisan E dikatakan monoton jika untuk setiap himpunan tak berhingga $K \subseteq \mathbb{N}$ dan $\bar{x} = (x_k) \in E$ maka $(\alpha_k x_k) \in E$, dengan $\alpha_k = 1$ untuk setiap $k \in K$ dan $\alpha_k = 0$ untuk k lainnya.

Lema 2. Setiap ruang barisan solid merupakan ruang barisan monoton.

Bukti. Diambil sebarang E ruang barisan solid. Diambil sebarang himpunan $K = \{k_i \in \mathbb{N}: k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$. Diambil sebarang barisan $\bar{x} = (x_k) \in E$ dan barisan skalar $\bar{\alpha} = (\alpha_k) \in \mathbb{R}$, dengan $\alpha_k = 1$ untuk setiap $k \in K$ dan $\alpha_k = 0$ untuk k lainnya. Akibatnya, $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap $k \in K$. Karena E ruang barisan solid, maka $(\alpha_k x_k) \in E$. Jadi, E ruang barisan monoton. ■

Teorema 9. Ruang barisan $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ monoton.

Bukti. Memanfaatkan Lema 2.

Akibat 2.

- Jika $|u_k| \leq 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $l_M(\Delta^m, \bar{p}, q, s) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$.
- Jika $|u_k| \geq 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s) \subseteq l_M(\Delta^m, \bar{p}, q, s)$.

D. Kesimpulan

Untuk sebarang fungsi Orlicz M , himpunan

$$l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s) = \left\{ \bar{x} \in S(X): \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} < \infty, \text{ untuk suatu } \rho > 0 \right\}.$$

merupakan ruang linear atas $\mathbb{R}$. Selain itu, ruang $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$ juga merupakan ruang paranorma terhadap paranorma,

$$g(\bar{x}) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \rho > 0 \text{ sehingga } \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left(M \left(q \left(\frac{u_k \Delta^m x_k}{\rho} \right) \right) \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, s \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

dengan $H = \max \left\{ 1, \sup_k p_k \right\}$. Lebih lanjut, berhasil diselidiki sifat-sifat inklusi terkait ruang $l_M(\Delta^m, \bar{u}, \bar{p}, q, s)$.

DAFTAR PUSTAKA

- Aiyub, M. (2013). On some seminormed sequence spaces defined by Orlicz Function. *Proyecciones Journal of Mathematics*, Vol. 32, No. 3, 267-280.
- Chen, S. (1996). *Geometry of Orlicz Spaces*. Instytut Matematyczny PAN, Warszawa.
- Khan, V. A., Abdullah, S. A. A., dan Alshloul, K. M. A. S. (2021). A Study of Norlund Ideal Convergent Sequence Spaces. *Yugoslav Journal of Operations Reserch*, Vol.31, No.4, 483-494.



- Krasnoselskiy, M. A. dan Rutickii, B. Y. (1961). *Convex Function and Orlicz Spaces*. P. Noordhoff, Ltd., Groningen, The Netherlands.
- Leonard, C. (2007). *Orlicz Spaces*. 1-10.
- Lindenstrauss, J. dan Tzafriri, L. (1971). On Orlicz sequence spaces. *Israel J. Math.*, Vol. 10, 379-390.
- Raj, K. dan Sharma, S. K. (2013). Some New Sequence Spaces. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, Vol. 9 Issue 2, 596-613.
- Rao, M. M. dan Ren, Z. D. (2002). *Applications of Orlicz Spaces*. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Yosida, K. (1968). Semi-norms. In: *Functional Analysis. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 123, 22-68.

