Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

ANALISIS MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN ADANYA PENYAKIT DAN PEMANENAN PADA PEMANGSA

Fardinah[1], Darma Ekawati[2], Budi[3]
Program Studi Statistika [1,2], Program Studi Matematika[3]
Universitas Sulawesi Barat[1,2,3]
Email: fardinah@unsulbar.ac.id[1], darmaekawati@unsulbar.ac.id [2],
budiprathama2020@gmail.com [3]

Abstrak. Interaksi antara dua populasi yang bersifat mangsa dan pemangsa dapat digambarkan dalam suatu model mangsa pemangsa. Salah satu bentuk interaksi yang dapat dijumpai adalah pada saat kepadatan mangsa rendah efek pemangsaan juga rendah sedangkan jika ukuran populasi mangsa meningkat maka pemangsaan akan lebih intensif. Bentuk interkasi tersebut dinyatakan dalam model fungsi respon Holling Tipe III. Selain itu, dapat pula dijumpai dalam suatu lingkungan adanya populasi pemangsa sakit yang mengakibatkan kematian karena penyakit tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe III yang terdiri dari tiga subpopulasi yaitu mangsa, pemangsa sehat dan pemangsa sakit. Analisis dilakukan dengan metode linearisasi kemudian jenis kestabilan ditentukan berdasarkan karakteristik nilai eigen yang diperoleh dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Dari penelitian ini diperoleh bahwa kepunahan populasi tidak mungkin terjadi. Keadaan mangsa eksis, kepunahan pemangsa sakit dan populasi eksis masih memungkinkan terjadi jika memenuhi kondisi yang disyaratkan. Simulasi numerik menunjukkan bahwa laju pemanenan yang diperbesar pada populasi pemangsa sehat mengakibatkan jumlah populasi pemangsa sehat semakin berkurang, pertambahan pada populasi mangsa dan penurunan populasi pemangsa sakit. Sedangkan laju pemanenan yang diperkecil pada populasi pemangsa sakit tidak berpengaruh signifikan terhadap jumlah populasi pemangsa sakit namun mengakibatkan jumlah populasi pemangsa sehat bertambah dan berkurangnya populasi mangsa.

Kata Kunci: Model Mangsa Pemangsa, Holling Tipe III, Pemanenan, Penyakit pada Pemangsa

Abstract. The interaction between two populations that are prey and predator can be described in a prey-predator model. One form of interaction that can be found is when the prey density is low, the predation effect is also low, whereas if the size of the prey population increases, the predation will be more intense. The form of the interaction is stated in the Holling III Type response function model. In addition, it can also be found in an environment where there are populations of sick predators that result in death from the disease. This study aims to analyze the stability of the prey-predator model with the Holling Type III response function, which consists of three subpopulations namely prey, healthy predators and sick predators. The analysis was carried out using the linearization method and then the type of stability was determined based on the characteristic eigenvalues obtained using the Routh-Hurwitz criteria. From this study, it was found that population extinction is not likely to occur. The state of the prey exists, the extinction of sick predators and the existing population is still possible if it meets the required conditions. Numerical simulations show that an increased harvesting rate in healthy predator populations results in a decrease in healthy predator populations, an increase in prey populations and a decrease in diseased predator populations. Meanwhile, a reduced harvesting rate for sick predator populations does not have a significant effect on the number of diseased predator populations, but increases the number of healthy predator populations and a decrease in prey populations.

Keywords: Prey Predator Model, Holling III Type, Harvesting, Disease in Predator

A. Pendahuluan

Perkembangan model matematika realistik dalam ilmu ekologi sangat baik dalam merefleksikan penggunaannya untuk mendiskripsikan permasalahan pada interaksi populasi

CC BY SA

dengan model matematika yang salah satunya adalah model mangsa pemangsa. Di ekosistem sering kali kelompok mangsa diasumsikan tertangkap dan termangsa oleh pemangsa ketika terjadi predasi (Dawes & Souza, 2013).

Model mangsa pemangsa pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1926 yang selanjutnya dikenal dengan model Lotka-Voltera. Model mangsa pemangsa kemudian terus mengalami perkembangan salah satunya adalah bentuk interaksi antara mangsa dan pemangsa yang dikenal dengan fungsi respon. Fungsi respon dalam ekologi diartikan sebagai jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan (Panja, Mondal, & Chattopafhyay, 2017). Tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling tipe I, tipe II dan tipe III (Mortoja, Panja, & Mondal, 2018).

Fungsi respon yang digunakan dalam penelitian ini yaitu fungsi respon Holling tipe III. Pada tipe ini, hubungan tingkat pemangsaan dan kepadatan mangsa bersifat sigmoid, dimana saat kepadatan mangsa rendah, efek pemangsaan juga rendah, tetapi jika ukuran populasi mangsa meningkat, pemangsaan akan lebih intensif (Agarwal, 2012).

Selain model ekologi, masalah epidemiologi merupakan salah satu topik hangat dalam pemodelan matematika. Pemodelan matematika dalam epidemiologi memberikan pemahaman tentang mekanisme mendasar yang mempengaruhi penyebaran penyakit. Pada beberapa tahun terakhir penelitian akan ekologi dan epidemiologi banyak dilakukan, meskipun dua bidang ini berbeda kontribusinya terhadap ilmu pengetahuan namun ada kesamaan diantara keduanya yaitu mencakup makhluk hidup (Maisaroh, Resmawan, & Rahmi, 2020).

Penelitian mengenai model mangsa pemangsa dengan melibatkan populasi yang sakit telah dilakukan beberapa peneliti sebelumnya yaitu analisis kestabilan model Predator-prey dengan infeksi penyakit pada prey dan pemanenan proporsional pada predator dengan menggunakan fungsi repon Holling Tipe I (Maisaroh, Resmawan, & Rahmi, 2020) serta vaksinasi dan treatment pada predator-prey dengan dua jenis pemangsa yang salah satunya terinfeksi (Mu'tamar, Rahmalia, & Sutimin, 2019). Sedangkan penelitian model mangsa pemangsa dengan adanya usaha pemanenan dan analisis keuntungan maksimum telah diantaranya Optimal harvesting policy of a prey–predator model with Crowley–Martin-type functional response and stage structure in the predator (Dubey, Agarwal, & Kumar, 2018) serta penelitian kestabilan dan usaha pemanenan model predator prey tipe Holling III dengan keuntungan maksimum (Didiharyono & Irwan (2019).

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, peneliti tertarik untuk mengembangkan penelitian dengan menambahkan faktor penyakit pada pemangsa disertai pemanenan. Pada penelitian ini diasumsikan bahwa infeksi penyakit hanya menyebar pada populasi pemangsa dan diasumsikan pula bahwa hanya pemangsa yang bernilai ekonomis dan bermanfaat untuk manusia sehingga pemanenan hanya dilakukan pada populasi pemangsa. Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk memformulasikan model, menganalis kestabilan titik kesetimbangan model dan interpretasi model.

B. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan simulasi model dengan tahapan sebagai berikut :

1. Menentukan asumsi, parameter dan mengkonstruksi model mangsa pemangsa dengan adanya penyakit dan pemanenan pada pemangsa.
2. Menentukan titik kesetimbangan model mangsa pemangsa dengan adanya penyakit dan pemanenan pada pemangsa..
3. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model mangsa pemangsa dengan adanya penyakit dan pemanenan pada pemangsa.
4. Melakukan simulasi numerik dan interpretasi model.

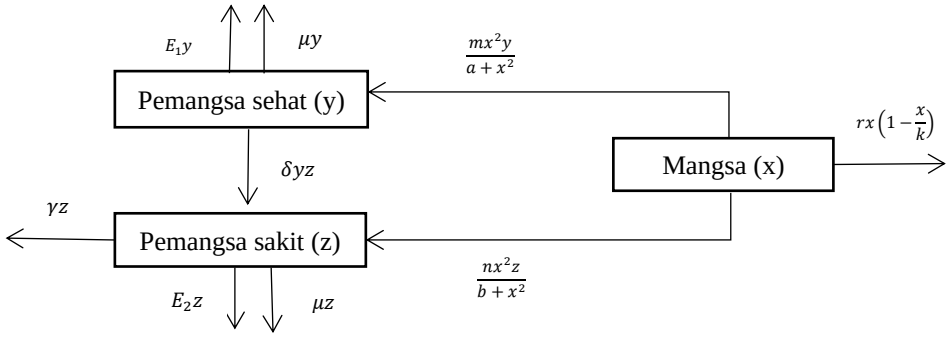
C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

1. Model Mangsa Pemangsa dengan Adanya Penyakit dan Pemanenan pada Pemangsa.

Dalam pembentukan model mangsa pemangsa dengan adanya penyakit dan pemanenan pada pemangsa diperlukan asumsi-asumsi yang berlaku dalam ekosistemnya. Asumsi-asumsi tersebut diberikan sebagai berikut:

1. Terdapat tiga subpopulasi yaitu mangsa, pemangsa sehat dan pemangsa sakit.
2. Penyakit hanya menyebar pada populasi pemangsa
3. Dalam keadaan tanpa pemangsa populasi mangsa tumbuh secara logistik.
4. Mangsa memiliki makanan yang cukup.
5. Mangsa merupakan makanan utama bagi pemangsa.
6. Fungsi pemangsaan menggunakan fungsi respon Holling III
7. Pemangsa memiliki nilai ekonomis sehingga dapat dipanen

Berdasarkan asumsi tersebut diperoleh konstruksi diagram kompartemen seperti pada gambar berikut.



Gambar 1. Diagram kompartemen model mangsa pemangsa dengan pemangsa sakit dan adanya pemanenan

Daftar variabel dan parameter yang digunakan seperti dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Daftar vaariabel dan parameter yang digunakan dalam model

Notasi	Interpretasi
x	Jumlah mangsa
y	Jumlah pemangsa sehat
z	Jumlah pemangsa sakit
r	koefisien kelahiran mangsa
k	koefisien daya dukung lingkungan
m	laju kelahiran pemangsa sehat
n	laju kelahiran pemangsa sakit
a	koefisien kejenuhan pemangsa sehat
b	koefisien kejenuhan pemangsa sakit
μ	koefisien kematian alami pemangsa
δ	laju infeksi
γ	laju kematian karena penyakit
e_1	koefisien pemanenan pemangsa sehat
e_2	koefisien pemanenan pemangsa sakit

Model mangsa pemangsa dengan adanya penyakit dan pemanenan pada pemangsa sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{k}\right) - \frac{mx^2y}{a+x^2} - \frac{nx^2z}{b+x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mx^2y}{a+x^2} - \mu y - \delta yz - e_1y \qquad (3.1)$$

CC BY SA

$$\frac{dz}{dt} = \frac{nx^2z}{b+x^2} + \delta yz - \mu z - \gamma z - e_2 z$$

dengan r, k, m, n, a, b, μ, δ, γ, e_1, dan $e_2 \in \mathbb{R}^+$.

2. Titik Ekuilibrium Model

Didefinisikan $\mathbb{R}^3_+ = \{(x,y,z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Titik ekuilibrium dari sistem (3.1) adalah solusi dari sistem (3.1) yang memenuhi $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Dengan demikian titik ekuilibrium dari sistem (3.1) ditentukan melalui persamaan – persamaan berikut:

$$rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mx^2y}{a+x^2} - \frac{nx^2z}{b+x^2} = 0$$
$$\frac{mx^2y}{a+x^2} - \mu y - \delta yz - e_1 y = 0$$
$$\frac{nx^2z}{b+x^2} + \delta yz - \mu z - \gamma z - e_2 z = 0.$$

Dari $rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mx^2y}{a+x^2} - \frac{nx^2z}{b+x^2} = 0$ diperoleh $x\left[r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{a+x^2} - \frac{nxz}{b+x^2}\right] = 0$

Diperoleh $x = 0$ atau $r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{a+x^2} - \frac{nxz}{b+x^2} = 0$

Dari $\frac{mx^2y}{a+x^2} - \mu y - \delta yz - e_1 y = 0$ diperoleh $y\left[\frac{mx^2}{a+x^2} - \mu - \delta z - e_1\right] = 0$

Diperoleh $y = 0$ atau $\frac{mx^2}{a+x^2} - \mu - \delta z - e_1 = 0$

Dari $\frac{nx^2z}{b+x^2} + \delta yz - \mu z - \gamma z - e_2 z = 0$ diperoleh $z\left[\frac{nx^2}{b+x^2} + \delta y - \mu - \gamma - e_2\right] = 0$

Diperoleh $z = 0$ atau $\frac{nx^2}{b+x^2} + \delta y - \mu - \gamma - e_2 = 0$

Dengan demikian titik ekuilibrium Sistem (3.1) sebagai berikut:

i. Titik ekuilibrium kepunahan populasi $E_1(0,0,0)$
ii. Titik ekuilibrium mangsa eksis $E_2(k,0,0)$
iii. Titik ekuilibrium kepunahan pemangsa sakit $E_3\left(x^*, \frac{r\left(1-\frac{x^*}{k}\right)(a+x^*)}{\mu x^*}, 0\right)$ dengan $x^* = \sqrt{\frac{a(\mu+e_1)}{(m-\mu-e_1)}}$ dengan syarat $m > \mu + e_1$
iv. Titik ekuilibrium populasi eksis $E_4\left(x^*, \frac{(\mu+\gamma+e_2-n)x^{*2}+b(\mu+\gamma+e_2)}{d(b+x^{*2})}, \frac{(m-\mu-e_1)x^{*2}-a(\mu+e_1)}{d(a+x^{*2})}\right)$ dengan x^* adalah akar positif dari persamaan $drx^5 - dkrx^4 + [(dr(a+b) + k\mu(\mu+\gamma+e_2-n) + kn(m-\mu-e_1)]x^3 - [dkr(a+b)]x^2 - [akn(\mu+e_1) - abdr - bk\mu(\mu+\gamma+e_2)]x - abdkr = 0$ serta $\mu + \gamma + e_2 < n$ dan $m > \mu + e_1$.

3. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Model

Selanjutnya akan dipelajari dinamika di sekitar titik-titik ekuilibrium sistem (3.1). Untuk mengidentifikasi kestabilan lokal dari titik ekuilibrium, dilakukan pelinearan terhadap model (3.1). Hasil peliniearan memberikan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r - \frac{2rx}{k} - \frac{2amxy}{(a+x^2)^2} - \frac{2bnxz}{(b+x^2)^2}} & \boldsymbol{-\frac{mx^2}{a+x^2}} & \boldsymbol{-\frac{nx^2}{b+x^2}} \\ \boldsymbol{\frac{2amxy}{(a+x^2)^2}} & \boldsymbol{\frac{mx^2}{a+x^2} - \mu - dz - e_1} & \boldsymbol{-dy} \\ \boldsymbol{\frac{2bnxz}{(b+x^2)^2}} & \boldsymbol{dz} & \boldsymbol{\frac{nx^2}{b+x^2} + dy - \mu - \gamma - e_2} \end{bmatrix}$$

CC BY SA

Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

Substitusi titik ekuilibrium E_1 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$\mathbf{J_{E_1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{e_1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{e_2}) \end{bmatrix}.$$

Diperoleh nilai eigen $\boldsymbol{\lambda_1 = r},\ \boldsymbol{\lambda_2 = -(\mu + e_1)}$ dan $\boldsymbol{\lambda_3 = -(\mu+\gamma+e_2}$. Karena terdapat nilai eigen $\boldsymbol{\lambda_1 = r > 0}$ maka titik ekuilibrium $\boldsymbol{E_1}$ tidak stabil.

Substitusi titik ekuilibrium E_2 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$\mathbf{J_{E_2}} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{r} & -\frac{\boldsymbol{mk^2}}{\boldsymbol{a+k^2}} & -\frac{\boldsymbol{nk^2}}{\boldsymbol{b+k^2}} \\ \mathbf{0} & \frac{\boldsymbol{mk^2}}{\boldsymbol{a+k^2}} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{e_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\boldsymbol{nk^2}}{\boldsymbol{b+k^2}} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e_2} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh nilai eigen $\boldsymbol{\lambda_1 = -r}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{mk^2}{a+k^2} - \mu - e_1}$ dan $\boldsymbol{\lambda_3 = \frac{nk^2}{b+k^2} - \mu - \gamma - e_2}$. Dengan demikian titik ekuilibrium $\boldsymbol{E_2}$ stabil asimtotik lokal jika $\boldsymbol{\frac{mk^2}{a+k^2} < \mu + e_1}$ dan $\boldsymbol{\frac{nk^2}{b+k^2} < \mu + \gamma + e_2}$.

Substitusi titik ekuilibrium E_3 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$\mathbf{J_{E_3}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{2rx^*}}{\boldsymbol{k}} - \frac{\boldsymbol{2amx^*\left(r-\frac{rx^*}{k}\right)(a+x^*)}}{\boldsymbol{\left(a+x^{*2}\right)^2 \mu x^*}} & -\frac{\boldsymbol{mx^{*2}}}{\boldsymbol{a+x^{*2}}} & -\frac{\boldsymbol{nx^{*2}}}{\boldsymbol{b+x^{*2}}} \\ \frac{\boldsymbol{2am\left(r-\frac{rx^*}{k}\right)(a+x^*)}}{\boldsymbol{\mu\left(a+x^{*2}\right)^2}} & \frac{\boldsymbol{mx^{*2}}}{\boldsymbol{a+x^{*2}}} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{e_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\boldsymbol{nx^{*2}}}{\boldsymbol{b+x^{*2}}} + \frac{\boldsymbol{d\left(r-\frac{rx^*}{k}\right)(a+x^*)}}{\boldsymbol{\mu x^*}} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e_2} \end{bmatrix}.$$

Dari matriks $\mathbf{J_{E_3}}$ diperoleh persamaan karakteristik $\boldsymbol{(\lambda - B)\left[(\lambda - A)\left(\lambda - \left(\frac{mx^{*2}}{a+x^{*2}} - \mu - e_1\right) + \frac{Cmx^{*2}}{a+x^{*2}}\right)\right] = 0}$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik ekuilibrium $\boldsymbol{E_3}$ stabil asimtotik lokal jika $\mathbf{A} + \boldsymbol{\frac{mx^{*2}}{a+x^{*2}} < \mu + e_1}$ dan $\boldsymbol{\frac{mx^{*2}}{a+x^{*2}} + \frac{Cmx^{*2}}{a+x^{*2}} > \mu + e_1}$ dengan $\boldsymbol{A = r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{2am\left(r-\frac{rx^*}{k}\right)(a+x^*)}{\mu\left(a+x^{*2}\right)^2}}$, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\frac{nx^{*2}}{b+x^{*2}} + \frac{d\left(r-\frac{rx^*}{k}\right)(a+x^*)}{\mu x^*} - \mu - \gamma - e_2}$ dan $\mathbf{C} = \boldsymbol{\frac{2am\left(r-\frac{rx^*}{k}\right)(a+x^*)}{\mu\left(a+x^{*2}\right)^2}}$.

Substitusi titik ekuilibrium E_4 ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$\mathbf{J_{E_4}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{2rx^*}}{\boldsymbol{k}} - \frac{\boldsymbol{2amx^*y^*}}{\boldsymbol{\left(a+x^{*2}\right)^2}} - \frac{\boldsymbol{2bnx^*z^*}}{\boldsymbol{\left(b+x^{*2}\right)^2}} & -\frac{\boldsymbol{mx^{*2}}}{\boldsymbol{a+x^{*2}}} & -\frac{\boldsymbol{nx^{*2}}}{\boldsymbol{b+x^{*2}}} \\ \frac{\boldsymbol{2amx^*y^*}}{\boldsymbol{\left(a+x^{*2}\right)^2}} & \frac{\boldsymbol{mx^{*2}}}{\boldsymbol{a+x^{*2}}} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{dz^*} - \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{-dy^*} \\ \frac{\boldsymbol{2bnx^*z^*}}{\boldsymbol{\left(b+x^{*2}\right)^2}} & \boldsymbol{dz^*} & \frac{\boldsymbol{nx^{*2}}}{\boldsymbol{b+x^{*2}}} + \boldsymbol{dy^*} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e_2} \end{bmatrix}.$$

Dari matriks $\mathbf{J_{E_4}}$ diperoleh persamaan karakteristik $\boldsymbol{\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0}$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik ekuilibrium $\boldsymbol{E_4}$ stabil asimtotik lokal jika $\mathbf{P < 0}, \boldsymbol{R > 0}$dan $\boldsymbol{\frac{R-PQ}{P} > 0}$ dengan

$\boldsymbol{P = -(J_{11} + J_{12} + J_{13})}$,
$\mathbf{Q = J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} + J_{13}J_{31} - J_{23}J_{32} - J_{12}J_{21} + J_{12}J_{21}J_{33}}$,
$\mathbf{R = J_{11}J_{22}J_{33} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{21}J_{32} + J_{11}J_{23}J_{32} - J_{13}J_{22}J_{31}}$,

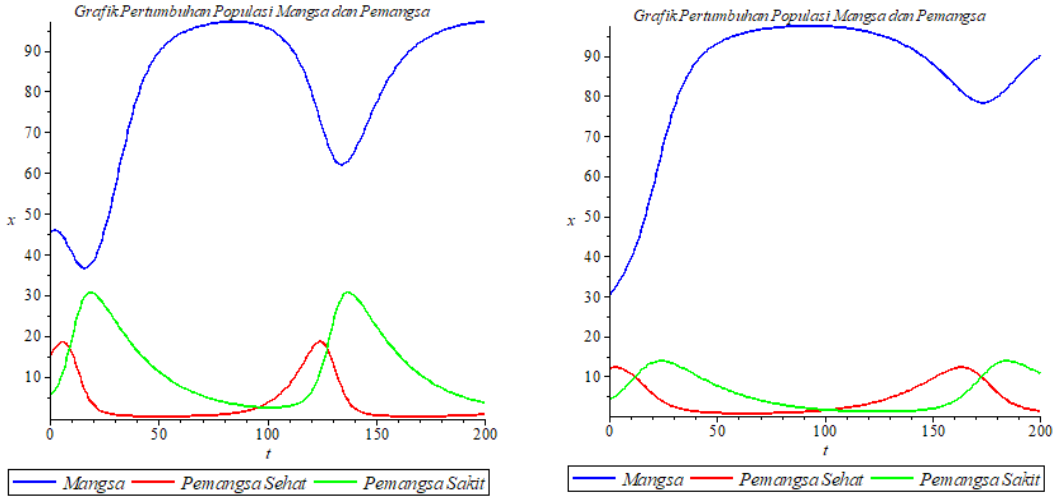
CC BY SA

$$J_{11} = r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{2amx^*y^*}{(a+x^{*2})^2} - \frac{2bnx^*z^*}{(b+x^{*2})^2} \quad , \quad J_{12} = -\frac{mx^{*2}}{a+x^{*2}}, J_{13} = -\frac{nx^{*2}}{b+x^{*2}}, J_{21} = \frac{2amx^*y^*}{(a+x^{*2})^2}, J_{22} = \frac{mx^{*2}}{a+x^{*2}} - \mu - dz^* - e_1, \; J_{23} = -dy^*, \; J_{31} = \frac{2bnx^*z^*}{(b+x^{*2})^2}, \; J_{32} = dz^*, \; J_{33} = \frac{nx^{*2}}{b+x^{*2}} + dy^* - \mu - \gamma - e_2$$

4. Simulasi Numerik

Untuk memperkuat hasil analisis yang telah diperoleh maka dilakukan simulasi numerik terhadap model (3.1). Karena keterbatasan data yang ada, pemilihan parameter disesuaikan dengan kondisi kestabilan yang diberikan pada hasil sebelumnya. Simulasi yang dilakukan hanya pada titik kesetimbangan populasi eksis yaitu titik kesetimbangan E_4.

Parameter yang digunakan yaitu r = 0.2, m = 0.25, k = 100, a = 0.009, n = 0.1, b = 0.001, δ =0.01, $\mu = 0.1$, $e2$ = 0.03, τ = 0.01 dan parameter kontrol $e1$ dan $e2$ dengan menggunakan dua nilai $e1$ yaitu $e1$ = 0.04 dan $e1$ = 0.1 serta dua nilai $e2$ yaitu $e2$ = 0.03 dan $e2$ = 0.09 yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_4\ (x, y, z) = (88.08, 4, 10.99)$ untuk $e1$ = 0.04 dan $E_4\ (x, y, z) = (91.8, 4, 4.99)$ untuk $e1$ = 0.1 . Diperoleh gambar pertumbuhan populasi sebagai berikut:



(a) (b)

Gambar 2 Grafik pertumbuhan populasi dengan nilai kontrol $e1$ = 0.04 (a) dan $e1$ = 0.1 (b)

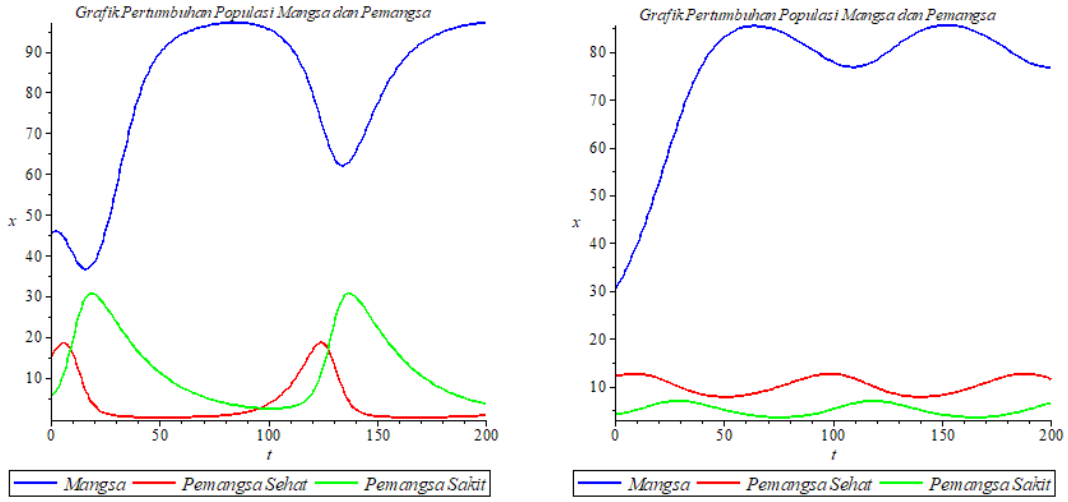
Gambar 2(a) dan 2(b) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bersifat stabil. Pada gambar 2(a) memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa menurun akibat bertambahnya populasi pemangsa. Seiring bertambahnya waktu, jumlah populasi mangsa meningkat akibat berkurangnya populasi pemangsa. Hal ini diakibatkan oleh adanya infeksi pada populasi pemangsa sehat, kematian karena penyakit pada pemangsa sakit serta adanya pemanenan pada populasi mangsa.

Pada Gambar 2(b) memperlihatkan bahwa pertumbuhan populasi mangsa mengalami peningkatan karena penurunan populasi pemangsa sehat, hal ini disebabkan oleh adanya infeksi pada pemangsa sehat sehingga pertumbuhan populasi pemangsa sakit juga mengalami peningktatan. Selanjutnya jumlah populasi pemangsa terus mengalami penurunan akibat adanya pemanenan yang mengakibatkan jumlah populasi mangsa meningkat. Seiring berjalannya waktu jumlah populasi mangsa dan pemangsa terus mengalami perubahan dan bergerak disekitar titik kesetimbangannya.

Laju pemanenan yang diperbesar pada populasi pemangsa sehat mengakibatkan jumlah populasi pemangsa sehat semakin berkurang seperti pada gambar 2(b). Hal tersebut juga mengakibatkan pertambahan pada populasi mangsa dan penurunan populasi pemangsa sakit.

CC BY SA

Selanjutnya simulasi dilakukan dengan parameter kontrol *e2* dengan menggunakan dua nilai *e2* yaitu *e2* = 0.03 dan *e2* = 0.09 yang masing-masing memberikan nilai titik kesetimbangan E_4 $(x, y, z) = (91.8, 4, 4.99)$ dan E_4 $(x, y, z) = (81.6, 10, 4.9)$. Diperoleh gambar pertumbuhan populasi sebagai berikut:



(a) (b)

Gambar 3 Grafik pertumbuhan populasi dengan nilai kontrol *e2* = 0.03 (a) dan *e1* = 0.09 (b)

Gambar 3(a) dan 3(b) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bersifat stabil. Pada gambar 3(a) memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi mangsa menurun akibat bertambahnya populasi pemangsa. Selanjutnya, jumlah populasi mangsa meningkat akibat berkurangnya populasi pemangsa. Hal ini diakibatkan oleh adanya infeksi pada populasi pemangsa sehat, kematian karena penyakit pada pemangsa sakit serta adanya pemanenan pada populasi mangsa. Seiring berjalannya waktu jumlah populasi mangsa dan pemangsa terus bergerak disekitar titik kesetimbangan.

Pada Gambar 3(b) memperlihatkan bahwa pada awal waktu pertumbuhan populasi mangsa mengalami peningkatan karena penurunan populasi pemangsa sehat, hal ini disebabkan oleh adanya infeksi pada populasi pemangsa sehat sehingga pertumbuhan populasi pemangsa sakit juga mengalami peningkatan. Selanjutnya jumlah populasi pemangsa terus mengalami penurunan akibat adanya pemanenan yang mengakibatkan jumlah populasi mangsa meningkat. Seiring berjalannya waktu jumlah populasi mangsa dan pemangsa terus mengalami perubahan dan bergerak disekitar titik kesetimbangannya.

Laju pemanenan yang diperkecil pada populasi pemangsa sakit tidak berpengaruh signifikan terhadap jumlah populasi pemangsa sakit namun mengakibatkan jumlah populasi pemangsa sehat bertambah karena berkurangnya infeksi sehingga mengakibatkan berkurangnya populasi mangsa akibat pemangsaan seperti pada gambar 3(b).

D. Kesimpulan

Model mangsa pemangsa dengan adanya penyakit dan pemanenan pada pemangsa seperti ditunjukkan pada sistem (3.1). Dari sistem tersebut diperoleh empat titik kesetimbangan yaitu kepunahan populasi, mangsa eksis, kepunahan pemangsa sakit dan populasi eksis. Hasil analisis titik kesetimbangan diperoleh bahwa kepunahan populasi tidak mungkin terjadi sedangkan mangsa eksis, kepunahan pemangsa sakit dan populasi eksis masih memungkinkan terjadi jika memenuhi kondisi yang disyaratkan. Simulasi numerik menunjukkan bahwa laju pemanenan yang diperbesar pada populasi pemangsa sehat mengakibatkan jumlah populasi pemangsa sehat semakin berkurang. Hal tersebut juga mengakibatkan pertambahan pada populasi mangsa dan penurunan populasi pemangsa sakit. Sedangkan laju pemanenan yang

CC BY SA

diperkecil pada populasi pemangsa sakit tidak berpengaruh signifikan terhadap jumlah populasi pemangsa sakit namun mengakibatkan jumlah populasi pemangsa sehat bertambah karena berkurangnya infeksi sehingga mengakibatkan berkurangnya populasi mangsa akibat pemangsaan.

DAFTAR PUSTAKA

Dawes, J.H.P., & Souza, M.O., 2013, A Derivation of Holling's Type I, II and III Functional Responses in Predator-Prey Systems. *Journal of Theoretical Biology.* Vol. 327, pp. 11–22.

Didiharyono & Irwan, M., 2019, Analisis Kestabilan dan Usaha Pemanenan Model Predator Prey Tipe Holling III dengan Keuntungan Maksimum, *Jurnal Varian*, Vol. 2, No.2, pp. 55-61.

Dubey, B., Agarwal, S., & Kumar, A., 2018, Optimal harvesting policy of a prey–predator model with Crowley–Martin-type functional response and stage structure in the predator, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 23, No. 4, pp. 493–514.

Maisaroh, S., Resmawan, R., & Rahmi, E., 2020, Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Infeksi Penyakit pada *Prey* dan Pemanenan Proporsional pada *Predator*, *Jambura J. Biomath.* Vol. 1, pp. 8-15.

Mortoja, S., Panja, P., & Mondal, S., 2018, Dynamics of a Predator-Prey Model with Stage Structure on Both Species and Anti-Predator Behavior, *Informatics in Medicine Unlocked*, Vol. 10, pp. 50–57.

Mu'tamar, K., Rahmalia, D., & Sutimin, S., 2019, Vaksinasi dan Treatment pada Predator-Prey dengan Dua Jenis Pemangsa yang Salah Satunya Terinfeksi, *Eksakta*, Vol. 19, No. 02, pp. 128-142.

Panja, P., Mondal, S., & Chattopadhyay, J., 2017, Dynamical Effects of Anti-predator Behaviour of Adult Prey in a Predator-Prey Model with Ratio-Dependent Functional Response, *Asian Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 1, pp. 19–32.

CC BY SA