

KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA DINAMIKA KORUPSI DENGAN PEMBERIAN EDUKASI DAN KAMPANYE, PERBAIKAN SISTEM, DAN REPRESIF

Amira Wahid¹, Syamsuddin Toaha², Kasbawati³

Universitas Hasanuddin^{1,2,3}

amirawahidmaraling@gmail.com¹, syamsuddint@gmail.com², kasbawati@gmail.com³

Abstrak. Salah satu masalah yang menarik untuk dikaji melalui pendekatan model matematika yaitu perilaku korupsi yang mengancam kehidupan masyarakat. Sektor pelayanan publik merupakan salah satu contoh lahan basah terkait korupsi birokrasi. Selain itu, adapula korupsi yang lebih besar karena mencakup pembuatan kebijakan politik. Pengembangan model dalam artikel ini dilakukan berdasarkan model matematika korupsi yang telah dikembangkan oleh (Fantaye dan Birhanu, 2021) dengan membagi populasi menjadi lima kompartemen yaitu *susceptible* (S), *exposed* (E), *corrupt* (C), *jailed* (J) dan *honest* (H). Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis titik kesetimbangan pada model matematika dinamika korupsi serta memberikan penerapan kontrol optimal pada dinamika korupsi melalui strategi yang telah diusung oleh KPK yaitu edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif diharapkan mampu menangani kasus korupsi secara efektif. Dari hasil analisis model diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan tanpa korupsi dan titik kesetimbangan adanya korupsi. Titik kesetimbangan tersebut akan stabil jika memenuhi syarat yang ditetapkan oleh aturan *Routh-Hurwitz*. Berdasarkan hasil simulasi numerik, menunjukkan bahwa peran KPK dalam memberantas korupsi dengan edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif memberikan hasil yang efektif.

Kata Kunci: Model Dinamika Korupsi, Titik Kesetimbangan, Kontrol Optimal

Abstract. One interesting problem to study through a mathematical model approach is corrupt behavior that threatens people's lives. The public service sector is an example of a wetland related to bureaucratic corruption. Apart from that, there is also greater corruption because it involves the making of political policies. The development of the model in this article is based on the mathematical model of corruption that has been developed by (Fantaye and Birhanu, 2021) by dividing the population into five compartments, namely susceptible (S), exposed (E), corrupt (C), jailed (J) and honest (H). This study aims to analyze the equilibrium point in the mathematical model of corruption dynamics and to provide optimal control on the dynamics of corruption through strategies that have been promoted by the Corruption Eradication Committee, namely education and campaigns, system improvement, and repressive strategies that are expected to be able to handle corruption cases effectively. From the results of the model analysis, two equilibrium points are obtained, namely the equilibrium point without corruption and the equilibrium point with corruption. The equilibrium point will be stable if it meets the conditions set by the Routh-Hurwitz rule. Based on the results of numerical simulations, it shows that the role of the KPK in eradicating corruption with education and campaigns, system improvements, and repressive strategies has yielded effective results.

Keywords: Corruption Dynamics Model, Equilibrium Point, Optimal Control

1. Pendahuluan

Pemodelan matematika adalah konstruksi pengetahuan yang didesain berdasarkan fenomena atau sistem yang terjadi pada kehidupan nyata. Pemodelan matematika dapat dikatakan tiruan dari suatu fenomena nyata dimana hasil dan prosesnya tidak boleh lepas dari asumsi-asumsi dan penyederhanaan. Pemodelan matematika ini dapat berbentuk grafik, simbol-simbol matematika, simulasi, atau eksperimen (Toaha, 2013).

Salah satu masalah yang menarik untuk dikaji melalui pendekatan model matematika yaitu perilaku korupsi yang mengancam kehidupan masyarakat. Korupsi di Indonesia sudah seperti



penyakit yang sangat akut. Berbagai pengobatan sudah diberikan, akan tetapi penyakit tersebut tak juga sembuh. Perilaku korupsi telah menggejala dan telah menjangkiti hampir di semua lini kehidupan, termasuk birokrasi pemerintah dan juga politik.

Sektor pelayanan publik merupakan salah satu contoh lahan basah terkait korupsi birokrasi. Sehingga tidak mengherankan, jika kasus-kasus seperti pungutan liar, gratifikasi, dan sejenisnya sering ditemukan di area ini. Akibatnya, birokrasi pun tidak lagi berjalan efektif dan efisien. Birokrasi pada akhirnya hanya menjadi pelayan penguasa dan oknum-oknum yang menghalalkan segala cara (Fatkhuri, 2017).

Selain itu, adapula korupsi yang lebih besar yaitu mencakup pembuatan kebijakan politik. Pada korupsi politik, kejahatan tidak hanya mengacu pada penyalahgunaan sumber daya, tetapi juga mempengaruhi cara keputusan dibuat. Korupsi politik terjadi jika Undang-undang dan regulasi lebih kurang disalahgunakan sistematis oleh penguasa, diabaikan serta tidak dilakukan secara prosedural, atau bahkan dirancang agar sesuai dengan kepentingan mereka (Amundsen, 1999).

Beberapa penelitian sebelumnya telah memodelkan masalah yang berkaitan dengan dinamika korupsi ini. Sebagai contoh model matematika dinamika korupsi yang dikembangkan oleh (Lemecha, 2018) dengan mempertimbangkan kesadaran yang diciptakan oleh antikorupsi dan konseling di penjara. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Nathan, 2019) yang membagi kompartemen korupsi menjadi dua kelas yaitu *corrupted class* dan *corrupt political class*. Penelitian lain juga dilakukan oleh (Danford, 2020) yang mempertimbangkan kesadaran yang diciptakan oleh antikorupsi dan konseling di penjara serta merumuskan dan menganalisis model matematika dinamika korupsi dengan adanya tindakan pengendalian. Pada tahun yang sama (Alemneh, 2020) menemukan bahwa pengendalian terpadu harus diambil untuk memerangi korupsi. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Fantaye dan Birhanu, 2021) yang mempertimbangkan pengaruh sosial pada individu yang jujur serta memberikan pengendalian berupa strategi pencegahan dan hukuman dalam memberantas korupsi.

Pemberantasan korupsi membutuhkan kesamaan pemahaman mengenai tindakan apa saja yang perlu dilakukan. Jika memiliki persepsi yang sama, maka pemberantasan korupsi bisa dilakukan secara tepat dan terarah, serta harus dilakukan secara bersama agar pemberantasan dapat berjalan dengan efektif. Berdasarkan hal tersebut, maka dalam artikel ini dikaji penerapan kontrol optimal pada dinamika korupsi melalui strategi yang telah diusung oleh KPK yaitu edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif. Serta pengembangan model dalam penelitian ini dilakukan berdasarkan model matematika korupsi yang telah dikembangkan oleh (Fantaye dan Birhanu, 2021) dengan membagi populasi menjadi lima kompartemen yaitu *susceptible* (*S*), *exposed* (*E*), *corrupt* (*C*), *jailed* (*J*) dan *honest* (*H*).

2. Formulasi Model

Pada bagian ini, populasi dibagi menjadi lima kompartemen diantaranya *susceptible* (*S*), *exposed* (*E*), *corrupt* (*C*), *jailed* (*J*), dan *honest* (*H*) dengan asumsi bahwa:

- (i) *Susceptible* (*S*) adalah populasi yang tidak pernah melakukan tindak pidana korupsi namun rentan terhadap perilaku korupsi, serta pernah menjadi individu yang jujur namun kembali karena adanya pengaruh sosial.
- (ii) *Exposed* (*E*) adalah populasi yang telah terpapar dengan perilaku korupsi, sudah ada niat untuk melakukan korupsi, namun belum melakukan praktek korupsi tersebut.
- (iii) *Corrupt* (*C*) adalah populasi yang melakukan praktek pidana korupsi serta mampu mempengaruhi populasi rentan untuk ikut melakukan praktek pidana korupsi.



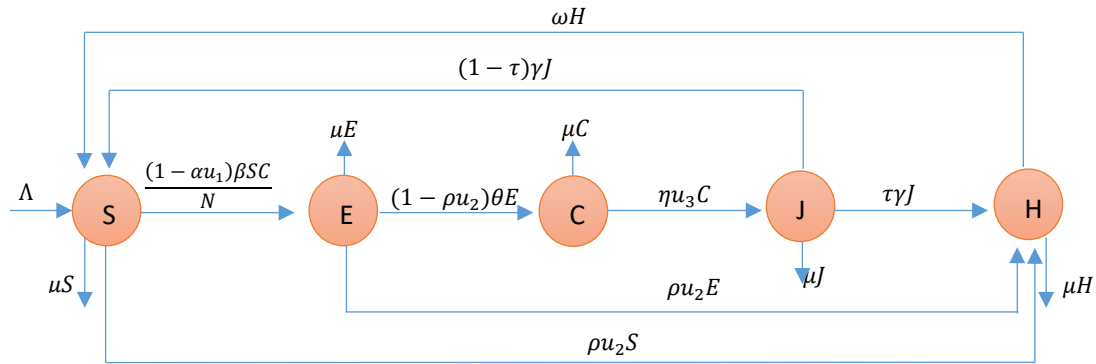
- (iv) *Jailed (J)* adalah populasi yang berhasil dimasukkan dalam penjara karena kasus pidana korupsi.
 (v) *Honest (H)* adalah populasi rentan, terpapar, atau bebas dari penjara yang kemudian sadar untuk tidak melakukan tindak pidana korupsi.
 Adapun parameter dari model disajikan dalam tabel 1.

Tabel 1. Parameter Model

<i>Simbol</i>	<i>Keterangan</i>	<i>Syarat</i>	<i>Satuan</i>
Λ	Rata-rata penambahan populasi rentan melakukan korupsi melalui proses kelahiran alami maupun migrasi	$\Lambda > 0$	Orang / tahun
μ	Rata-rata banyaknya individu yang keluar dari setiap kompartemen karena kematian alami	$\mu > 0$	1 / tahun
β	Rata-rata banyaknya kontak yang dilakukan antara individu <i>susceptible (S)</i> dengan individu <i>corrupt (C)</i>	$\beta > 0$	1 / (orang x Tahun)
θ	Rata-rata banyaknya individu yang berpindah dari <i>ekspose (E)</i> ke individu <i>corrupt (C)</i>	$\theta > 0$	1 / tahun
γ	Rata-rata banyaknya koruptor yang telah keluar dari penjara	$\gamma > 0$	1 / tahun
ω	Rata-rata banyaknya individu jujur yang akan kembali menjadi rentan terhadap perilaku korupsi	$\omega > 0$	1 / tahun
τ	Proporsi individu yang jujur setelah keluar dari penjara	$0 < \tau < 1$	-
α	Efektivitas edukasi dan kampanye	$0 < \alpha < 1$	-
ρ	Efektivitas perbaikan sistem	$0 < \rho < 1$	-
η	Efektivitas tindakan represif	$0 < \eta < 1$	-
u_1	Proporsi jumlah populasi yang terhindar dari perilaku korupsi dengan upaya edukasi dan kampanye	$0 < u_1 < 1$	-
u_2	Proporsi jumlah populasi yang terhindar dari perilaku korupsi dengan upaya perbaikan sistem	$0 < u_2 < 1$	-
u_3	Proporsi jumlah populasi yang berhenti melakukan korupsi dengan upaya represif	$0 < u_3 < 1$	-

Berdasarkan diagram kompartemen dinamika korupsi pada Gambar 1, maka model dapat digambarkan sebagai berikut. Setiap individu yang lahir serta migrasi diasumsikan tidak pernah terlibat tindak pidana korupsi namun rentan terhadap perilaku korupsi akan masuk ke kelas populasi *susceptible (S)* dengan masukan sebesar Λ persatuan waktu. Populasi *corrupt (C)* dapat mempengaruhi populasi *susceptible (S)* dengan rata-rata banyaknya kontak yang terjadi sebesar β persatuan waktu. Dengan proporsi edukasi dan kampanye u_1 , perbaikan sistem u_2 , dan strategi represif u_3 populasi yang melakukan tindak pidana korupsi dapat ditekan serta diberantas dengan efektivitas masing-masing adalah α, ρ , dan η . Populasi yang keluar dari penjara dengan rata-rata jumlah populasi bebas adalah γ persatuan waktu dapat menjadi individu yang jujur dengan proporsi τ atau menjadi individu yang rentan terhadap perilaku korupsi dengan proporsi $\tau - 1$. Diasumsikan pula populasi di setiap kompartemen dapat berkurang akibat kematian alami sebesar μ persatuan waktu.





Gambar 1. Diagram kompartemen penyebaran perilaku korupsi

Berdasarkan asumsi dan diagram kompartemen dinamika korupsi, maka diperoleh sistem persamaan diferensial biasa nonlinier berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda + \omega H + (1 - \tau)\gamma J - \frac{(1 - \alpha u_1)\beta S C}{N} - \rho u_2 S - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{(1 - \alpha u_1)\beta S C}{N} - (1 - \rho u_2)\theta E - \rho u_2 E - \mu E, \\ \frac{dC}{dt} &= (1 - \rho u_2)\theta E - \eta u_3 C - \mu C, \\ \frac{dJ}{dt} &= \eta u_3 C - \tau \gamma J - (1 - \tau)\gamma J - \mu J, \\ \frac{dH}{dt} &= \tau \gamma J + \rho u_2 S + \rho u_2 E - \omega H - \mu H, \end{aligned} \quad (4.1)$$

dengan

$$\begin{aligned} S(0) &\geq 0, \\ E(0) &\geq 0, \\ C(0) &\geq 0, \\ J(0) &\geq 0, \\ H(0) &\geq 0. \end{aligned}$$

Dari sistem persamaan (4.1) dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dC}{dt} + \frac{dJ}{dt} + \frac{dH}{dt}, \\ &= \Lambda - \mu N. \end{aligned}$$

3. Titik Kestimbangan Model dan Kestabilannya

Pada bagian ini akan dicari titik kesetimbangan bebas korupsi dan titik kesetimbangan adanya korupsi. Untuk memperoleh titik kesetimbangan pada sistem persamaan (4.1) maka sistem persamaan tersebut harus memenuhi

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0, \frac{dJ}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dH}{dt} = 0.$$

Jika dimisalkan $S(t) = 0, E(t) = 0, C(t) = 0, J(t) = 0,$ dan $H(t) = 0,$ maka dari sistem persamaan (4.1) diperoleh:

$$\begin{aligned} \Lambda + \omega H + (1 - \tau)\gamma J - \frac{(1 - \alpha u_1)\beta S C}{N} - \rho u_2 S - \mu S &= 0, \\ \frac{(1 - \alpha u_1)\beta S C}{N} - (1 - \rho u_2)\theta E - \rho u_2 E - \mu E &= 0, \\ (1 - \rho u_2)\theta E - \eta u_3 C - \mu C &= 0, \\ \eta u_3 C - \tau \gamma J - (1 - \tau)\gamma J - \mu J &= 0, \end{aligned}$$



$$\tau\gamma J + \rho u_2 S + \rho u_2 E - \omega H - \mu H = 0, \tag{4.2}$$

Selanjutnya dimisalkan

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1 - \tau)\gamma, \\ \sigma_2 &= (1 - \alpha u_1)\beta, \\ \sigma_3 &= \rho u_2 + \mu, \\ \sigma_4 &= (1 - \rho u_2)\theta + \rho u_2 + \mu, \\ \sigma_5 &= (1 - \rho u_2)\theta, \\ \sigma_6 &= \eta u_3 + \mu, \\ \sigma_7 &= \eta u_3, \\ \sigma_8 &= \tau\gamma + (1 - \tau)\gamma + \mu, \\ \sigma_9 &= \tau\gamma, \\ \sigma_{10} &= \rho u_2, \\ \sigma_{11} &= \omega - \mu. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Berdasarkan pemisalan pada persamaan (4.4) maka persamaan (4.3) menjadi

$$\Lambda + \omega H + \sigma_1 J - \frac{\sigma_2 SC}{N} - \sigma_3 S = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\sigma_2 SC}{N} - \sigma_4 E = 0, \tag{4.6}$$

$$\sigma_5 E - \sigma_6 C = 0, \tag{4.7}$$

$$\sigma_7 C - \sigma_8 J = 0, \tag{4.8}$$

$$\sigma_9 J + \sigma_{10}(S + E) - \sigma_{11}H = 0. \tag{4.9}$$

3.1. Titik Keseimbangan Bebas Korupsi

Titik keseimbangan bebas korupsi merupakan keadaan dimana perilaku korupsi tidak menyebar dalam suatu populasi, hal tersebut terjadi jika $E = 0$ dan $C = 0$. Pertama, substitusi nilai $E = 0$ dan $C = 0$ ke dalam persamaan (4.8) sehingga diperoleh $J = 0$. Setelah itu, substitusikan ketiga nilai tersebut ke persamaan (4.5) serta persamaan (4.9) sehingga masing-masing diperoleh

$$\Lambda + \omega H - \sigma_3 S = 0, \tag{4.10}$$

$$H = \frac{\sigma_{10} S}{\sigma_{11}}. \tag{4.11}$$

Substitusi nilai H ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh

$$S = \frac{\sigma_{11} \Lambda}{\sigma_{11} \sigma_3 - \omega \sigma_{10}}. \tag{4.12}$$

Dengan mensubstitusi nilai S pada persamaan (4.12) ke dalam persamaan (4.10) diperoleh

$$H = \frac{\sigma_{10} \Lambda}{\sigma_{11} \sigma_3 - \omega \sigma_{10}}. \tag{4.13}$$

Sehingga diperoleh titik keseimbangan bebas korupsi yaitu:

$$\xi_0(S, E, C, J, H) = \left(\frac{\sigma_{11} \Lambda}{\sigma_{11} \sigma_3 - \omega \sigma_{10}}, 0, 0, 0, \frac{\sigma_{10} \Lambda}{\sigma_{11} \sigma_3 - \omega \sigma_{10}} \right).$$

3.2. Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Korupsi

Titik keseimbangan bebas korupsi merupakan keadaan dimana perilaku korupsi menyebar dalam suatu populasi, hal tersebut terjadi jika $E > 0$ dan $C > 0$. Diperoleh titik keseimbangan adanya korupsi yaitu $\xi^* = (S^*, E^*, C^*, J^*, H^*)$ dengan

$$S^* = \frac{\Lambda \sigma_4 \sigma_6}{\mu \sigma_2 \sigma_5},$$



$$\begin{aligned}
 E^* &= \frac{\Lambda\sigma_6\sigma_8(\sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6 - \mu\sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 - \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6)}{\mu\sigma_2(\omega\sigma_{10}\sigma_6\sigma_8 + \omega\sigma_5\sigma_7\sigma_9 + \sigma_{11}\sigma_1\sigma_5\sigma_7 + \sigma_{11}\sigma_4\sigma_6\sigma_8)}, \\
 C^* &= \frac{\Lambda\sigma_8(\sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6 - \mu\sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 - \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6)}{\mu\sigma_2(\omega\sigma_{10}\sigma_6\sigma_8 + \omega\sigma_5\sigma_7\sigma_9 + \sigma_{11}\sigma_1\sigma_5\sigma_7 + \sigma_{11}\sigma_4\sigma_6\sigma_8)}, \\
 J^* &= \frac{\Lambda\sigma_7(\sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6 - \mu\sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 - \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6)}{\mu\sigma_2(\omega\sigma_{10}\sigma_6\sigma_8 + \omega\sigma_5\sigma_7\sigma_9 + \sigma_{11}\sigma_1\sigma_5\sigma_7 + \sigma_{11}\sigma_4\sigma_6\sigma_8)}, \\
 H^* &= (\Lambda(\sigma_1\sigma_{10}\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7 + \sigma_{10}\sigma_3\sigma_4\sigma_6^2\sigma_8 + \sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_9 - \mu\sigma_{10}\sigma_2\sigma_5\sigma_6\sigma_8 - \mu\sigma_2\sigma_5^2\sigma_7\sigma_9 - \sigma_{10}\sigma_4^2\sigma_8\sigma_6^2)) / \mu\sigma_2\sigma_5(\omega\sigma_{10}\sigma_6\sigma_8 + \omega\sigma_5\sigma_7\sigma_9 + \sigma_{11}\sigma_1\sigma_5\sigma_7 + \sigma_{11}\sigma_4\sigma_6\sigma_8).
 \end{aligned}$$

3.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan Adanya Korupsi

Sebelum menentukan kestabilan titik kesetimbangan, terlebih dahulu perlu dilakukan linearisasi. Dengan linearisasi, model matematika dinamika korupsi yang merupakan persamaan diferensial nonlinear dapat dianalisis kestabilannya.

Persamaan (4.3) didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 f_1(S, E, C, J, H) &= \Lambda + \omega H + \sigma_1 J - \frac{\sigma_2 SC}{N} - \sigma_3 S = 0, \\
 f_2(S, E, C, J, H) &= \frac{\sigma_2 SC}{N} - \sigma_4 E, \\
 f_3(S, E, C, J, H) &= \sigma_5 E - \sigma_6 C, \\
 f_4(S, E, C, J, H) &= \sigma_7 C - \sigma_8 J, \\
 f_5(S, E, C, J, H) &= \sigma_9 J + \sigma_{10}(S + E) - \sigma_{11} H.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Berdasarkan persamaan (4.14) diperoleh matriks Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_2 C \mu}{\Lambda} - \sigma_3 & 0 & -\frac{\sigma_2 S \mu}{\Lambda} & \sigma_1 & \omega \\ \frac{\sigma_2 C \mu}{\Lambda} & -\sigma_4 & \frac{\sigma_2 S \mu}{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5 & -\sigma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_7 & -\sigma_8 & 0 \\ \sigma_{10} & \sigma_{10} & 0 & \sigma_9 & -\sigma_{11} \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Substitusi nilai titik kesetimbangan bebas korupsi ke dalam matriks Jacobi pada persamaan (4.15) sehingga diperoleh:

$$J\xi_0 = \begin{bmatrix} -\sigma_3 & 0 & \frac{\sigma_2\sigma_{11}\mu}{(\omega\sigma_{10}-\sigma_{11}\sigma_3)} & \sigma_1 & \omega \\ 0 & -\sigma_4 & -\frac{\sigma_2\sigma_{11}\mu}{(\omega\sigma_{10}-\sigma_{11}\sigma_3)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5 & -\sigma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_7 & -\sigma_8 & 0 \\ \sigma_{10} & \sigma_{10} & 0 & \sigma_9 & -\sigma_{11} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik $|\lambda I - J\xi_0| = 0$ berikut ini

$$\begin{vmatrix} -\sigma_3 & 0 & \frac{\sigma_2\sigma_{11}\mu}{(\omega\sigma_{10}-\sigma_{11}\sigma_3)} & \sigma_1 & \omega \\ 0 & -\sigma_4 & -\frac{\sigma_2\sigma_{11}\mu}{(\omega\sigma_{10}-\sigma_{11}\sigma_3)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5 & -\sigma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_7 & -\sigma_8 & 0 \\ \sigma_{10} & \sigma_{10} & 0 & \sigma_9 & -\sigma_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

atau



$$\frac{1}{\omega\sigma_{10} + \sigma_{11}\sigma_3} \left((\omega\sigma_{10} - \sigma_{11}\sigma_3)\lambda^2 + (\omega\sigma_{10}\sigma_4 + \omega\sigma_{10}\sigma_6 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_6)\lambda + \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6 + \sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6 \right) (\lambda + \sigma_8)(\lambda^2 + (\sigma_{11} + \sigma_3)\lambda - \omega\sigma_{10} + \sigma_{11}\sigma_3) = 0.$$

Berdasarkan persamaan karakteristik $|\lambda I - J\xi_0| = 0$ diperoleh nilai eigen sebagai berikut

1. $(\lambda + \sigma_8) = 0,$
 $\lambda_1 = -\sigma_8.$
2. $(\lambda^2 + (\sigma_{11} + \sigma_3)\lambda - \omega\sigma_{10} + \sigma_{11}\sigma_3)$

Misalkan :

$$n_1 = (\sigma_{11} + \sigma_3),$$

$$n_2 = \sigma_{11}\sigma_3 - \omega\sigma_{10}.$$

Menurut aturan *Routh-Hurwitz* akar-akar dari persamaan karakteristik di atas, bagian real dapat bernilai negatif jika memenuhi

- $R_1 = n_1 > 0,$
- $R_2 = \begin{vmatrix} n_1 & 0 \\ 1 & n_2 \end{vmatrix} > 0$ jika dan hanya jika $n_1, n_2 > 0$ dan $n_1 n_2 > 0.$

Karena semua parameter diasumsikan bernilai positif maka $n_1 > 0.$ Selanjutnya, karena $a_2 > 0$ mengakibatkan syarat dari $R_2 > 0$ terpenuhi jika $n_2 > 0$ atau $\sigma_{11}\sigma_3 > \omega\sigma_{10}.$ Jika kedua syarat tersebut terpenuhi maka diperoleh $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0.$

3. $\left((\omega\sigma_{10} - \sigma_{11}\sigma_3)\lambda^2 + (\omega\sigma_{10}\sigma_4 + \omega\sigma_{10}\sigma_6 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_6)\lambda + \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6 + \sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6 \right).$
 $\lambda^2 + \frac{1}{\omega\sigma_{10} - \sigma_{11}\sigma_3} (\omega\sigma_{10}\sigma_4 + \omega\sigma_{10}\sigma_6 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_6)\lambda + \frac{1}{\omega\sigma_{10} - \sigma_{11}\sigma_3} (\omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6 + \sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6) = 0.$

Misalkan :

$$m_1 = \frac{1}{\omega\sigma_{10} - \sigma_{11}\sigma_3} (\omega\sigma_{10}\sigma_4 + \omega\sigma_{10}\sigma_6 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_6) \text{ dan}$$

$$m_2 = \frac{1}{\omega\sigma_{10} - \sigma_{11}\sigma_3} (\omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6 + \sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6).$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik di atas dengan bagian real yang bernilai negatif jika memenuhi aturan *Routh-Hurwitz* berikut

- $R_1 = m_1 > 0,$
- $R_2 = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 1 & m_2 \end{vmatrix} > 0$ jika dan hanya jika $m_1, m_2 > 0$ dan $m_1 m_2 > 0,$

Nilai pada m_1 dan m_2 memiliki bagian penyebut $\omega\sigma_{10} - \sigma_{11}\sigma_3 = -n_2$ yang bernilai negatif, sesuai pada bagian (1) n_2 dinyatakan positif, sehingga nilai $m_1, m_2 > 0$ jika bagian pembilang bernilai negatif. Nilai $m_1 > 0$ jika memenuhi $\sigma_{11}\sigma_3(\sigma_4 + \sigma_6) > \omega\sigma_{10}(\sigma_4 + \sigma_6)$ atau $\sigma_{11}\sigma_3 > \omega\sigma_{10},$ dan nilai $m_2 > 0$ jika nilai $\sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6 > \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6 + \sigma_{11}\sigma_2\sigma_5.$

Apabila nilai $m_1, m_2 > 0$ maka $m_2 > 0,$ sehingga $R_1 > 0$ dan $R_2 > 0$ terpenuhi. Dengan terpenuhinya aturan *Routh Hurwitz* di atas maka diperoleh nilai $\lambda_4 < 0$ dan $\lambda_5 < 0.$ Karena nilai dari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 < 0$ maka titik kesetimbangan bebas korupsi $\xi_0(S, E, C, J, H) = \left(\frac{\sigma_{11}\Lambda}{\sigma_{11}\sigma_3 - \omega\sigma_{10}}, 0, 0, 0, \frac{\sigma_{10}\Lambda}{\sigma_{11}\sigma_3 - \omega\sigma_{10}} \right)$ yang diperoleh adalah stabil asimtotik.

3.4. Kestabilan Titik Kesetimbangan Adanya Korupsi



Matriks Jacobi pada persamaan (4.15) akan dievaluasi pada titik kesetimbangan adanya korupsi yaitu $\xi^* = (S^*, E^*, C^*, J^*, H^*)$ sehingga diperoleh matriks Jacobi berikut

$$J\xi^* = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & -k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ -k_{21} & -k_{22} & k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & k_{32} & -k_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{43} & -k_{44} & 0 \\ k_{51} & k_{52} & 0 & k_{54} & -k_{55} \end{bmatrix},$$

dengan

$$k_{11} = \frac{\sigma_8(\mu\sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 + \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6)}{\omega\sigma_{10}\sigma_6\sigma_8 + \omega\sigma_5\sigma_7\sigma_9 + \sigma_{11}\sigma_1\sigma_5\sigma_7 - \sigma_{11}\sigma_4\sigma_6\sigma_8} - \sigma_3,$$

$$k_{13} = \frac{\sigma_4\sigma_6}{\sigma_5},$$

$$k_{14} = \sigma_1,$$

$$k_{15} = \omega,$$

$$k_{21} = \frac{\sigma_8(\mu\sigma_{11}\sigma_2\sigma_5 + \omega\sigma_{10}\sigma_4\sigma_6 - \sigma_{11}\sigma_3\sigma_4\sigma_6)}{\omega\sigma_{10}\sigma_6\sigma_8 + \omega\sigma_5\sigma_7\sigma_9 + \sigma_{11}\sigma_1\sigma_5\sigma_7 - \sigma_{11}\sigma_4\sigma_6\sigma_8},$$

$$k_{22} = \sigma_4,$$

$$k_{23} = \frac{\sigma_4\sigma_6}{\sigma_5},$$

$$k_{32} = \sigma_5,$$

$$k_{33} = \sigma_6,$$

$$k_{43} = \sigma_7,$$

$$k_{44} = \sigma_8,$$

$$k_{51} = \sigma_{10},$$

$$k_{52} = \sigma_{10},$$

$$k_{54} = \sigma_9,$$

$$k_{55} = \sigma_{11}.$$

Kestabilan titik kesetimbangan adanya korupsi dapat dilihat berdasarkan nilai eigen dari solusi persamaan karakteristik $|(\lambda I - J_{\xi^*})| = 0$ atau

$$\lambda^5 + q_1\lambda^4 + q_2\lambda^3 + q_3\lambda^2 + q_4\lambda + q_5, \tag{4.16}$$

dengan

$$q_1 = -k_{11} + k_{22} + k_{33} + k_{44} - k_{55},$$

$$q_2 = -k_{11}k_{22} - k_{11}k_{33} - k_{11}k_{44} + k_{11}k_{55} - k_{15}k_{51} + k_{22}k_{33} + k_{22}k_{44} - k_{22}k_{55} - k_{23}k_{32} + k_{33}k_{44} - k_{33}k_{55},$$

$$q_3 = -k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{22}k_{44} + k_{11}k_{22}k_{55} + k_{11}k_{23}k_{32} - k_{11}k_{33}k_{44} + k_{11}k_{33}k_{55} + k_{11}k_{44}k_{55} - k_{13}k_{21}k_{32} + k_{15}k_{21}k_{52} - k_{15}k_{22}k_{51} - k_{15}k_{44}k_{51} + k_{22}k_{33}k_{44} - k_{22}k_{33}k_{55} - k_{22}k_{44}k_{55} - k_{23}k_{32}k_{44} + k_{23}k_{32}k_{55} - k_{33}k_{44}k_{55},$$

$$q_4 = -k_{11}k_{22}k_{33}k_{44} + k_{11}k_{22}k_{33}k_{55} + k_{11}k_{22}k_{44}k_{55} + k_{11}k_{23}k_{32}k_{44} - k_{11}k_{23}k_{32}k_{55} + k_{11}k_{33}k_{44}k_{55} - k_{13}k_{21}k_{32}k_{44} + k_{13}k_{21}k_{32}k_{55} + k_{14}k_{21}k_{32}k_{43} + k_{15}k_{21}k_{33}k_{52} + k_{15}k_{21}k_{44}k_{52} - k_{15}k_{22}k_{33}k_{51} - k_{15}k_{22}k_{44}k_{51} + k_{15}k_{23}k_{32}k_{51} - k_{15}k_{33}k_{44}k_{51} - k_{22}k_{33}k_{44}k_{55},$$

$$q_5 = k_{15}k_{23}k_{32}k_{44}k_{51} + k_{11}k_{22}k_{33}k_{44}k_{55} - k_{11}k_{23}k_{32}k_{44}k_{55} + k_{13}k_{21}k_{32}k_{44}k_{55} - k_{14}k_{21}k_{32}k_{43}k_{55} + k_{15}k_{21}k_{32}k_{43}k_{54} + k_{15}k_{21}k_{33}k_{44}k_{52} - k_{15}k_{22}k_{33}k_{44}k_{51}.$$

Berdasarkan kriteria *Routh Hurwitz* maka diperoleh akar-akar dari persamaan karakteristik (4.16) dengan bagian real yang bernilai negatif jika memenuhi syarat berikut:

- $R_1 = q_1 > 0$.
- $R_2 = \begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 1 & q_2 \end{vmatrix} > 0$.

Jika dan hanya jika $q_1, q_2 > 0$ dan $q_1q_2 > 0$.



$$\bullet R_3 = \begin{vmatrix} q_1 & q_3 & q_5 \\ 1 & q_2 & q_4 \\ 0 & q_1 & q_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Jika dan hanya jika $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 > 0$ dan $q_1q_2q_3 + q_1q_5 > q_3^2 + q_1^2q_4$.

$$\bullet R_4 = \begin{vmatrix} q_1 & q_3 & q_5 & 0 \\ 1 & q_2 & q_4 & 0 \\ 0 & q_1 & q_3 & q_5 \\ 0 & 1 & q_2 & q_4 \end{vmatrix} > 0.$$

Jika dan hanya jika $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 > 0$ dan $q_1q_2q_3q_4 + 2q_1q_4q_5 + q_2q_3q_5 > q_1^2q_4^2 + q_1q_2^2q_5 + q_3^2q_4 + q_5^2$.

$$\bullet R_5 = \begin{vmatrix} q_1 & q_3 & q_5 & 0 & 0 \\ 1 & q_2 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & q_3 & q_5 & 0 \\ 0 & 1 & q_2 & q_4 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 & q_3 & q_5 \end{vmatrix} > 0.$$

Jika dan hanya jika $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 > 0$ dan $q_1q_2q_3q_4q_5 + 2q_1q_4q_5^2 + q_2q_3q_5^2 > q_1^2q_4^2q_5 + q_1q_2^2q_5^2 + q_3^2q_4q_5 + q_5^3$.

Karena diasumsikan semua parameter bernilai positif sehingga syarat $R_1 = q_1 > 0$ terpenuhi. Karena $q_1 > 0$ sehingga syarat $R_2 > 0$ terpenuhi ketika $q_2 > 0$. Jika syarat $R_2 > 0$ terpenuhi maka syarat $R_3 > 0$ terpenuhi ketika $q_3, q_4, q_5 > 0$ dan $q_1q_2q_3 + q_1q_5 > q_3^2 + q_1^2q_4$. Selanjutnya syarat $R_4 > 0$ terpenuhi jika $R_3 > 0$ dan $q_1q_2q_3q_4 + 2q_1q_4q_5 + q_2q_3q_5 > q_1^2q_4^2 + q_1q_2^2q_5 + q_3^2q_4 + q_5^2$. Sedangkan syarat R_5 terpenuhi jika syarat $R_4 > 0$ terpenuhi. Jadi dapat disimpulkan bahwa akar-akar persamaan karakteristik (4.15) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif yang mengakibatkan titik kesetimbangan adanya korupsi ξ^* stabil asimtotik jika nilai koefisien pada persamaan karakteristik (4.15) memenuhi kondisi $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 > 0$ dan $q_1q_2q_3q_4q_5 + 2q_1q_4q_5^2 + q_2q_3q_5^2 > q_1^2q_4^2q_5 + q_1q_2^2q_5^2 + q_3^2q_4q_5 + q_5^3$.

4. Model Kontrol Optimal

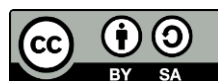
Pada bagian ini, kontrol berupa edukasi dan kampanye u_1 , perbaikan sistem u_2 , dan strategi represif u_3 diasumsikan sebagai suatu fungsi yang bergantung terhadap waktu t , sehingga persamaan (4.1) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda + \omega H + (1 - \tau)\gamma J - \frac{(1 - \alpha u_1(t))\beta SC}{N} - \rho u_2(t)S - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{(1 - \alpha u_1(t))\beta SC}{N} - (1 - \rho u_2(t))\theta E - \rho u_2(t)E - \mu E, \\ \frac{dC}{dt} &= (1 - \rho u_2(t))\theta E - \eta u_3 C - \mu C, \\ \frac{dJ}{dt} &= \eta u_3(t)C - \tau\gamma J - (1 - \tau)\gamma J - \mu J, \\ \frac{dH}{dt} &= \tau\gamma J + \rho u_2(t)S + \rho u_2(t)E - \omega H - \mu H. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Berdasarkan asumsi tersebut, fungsi kontrol didefinisikan sebagai

$$U = \{(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) | 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq u_3 \leq 1, \in [t_0, t_f]\}.$$

Tujuan dari kontrol optimal yang akan dicapai pada penelitian ini yaitu meminimumkan jumlah populasi *exposed* (E) dan *corrupt* (C) dengan biaya yang minimum pula. Adapun fungsi tujuan dari kontrol optimal tersebut diformulasikan secara matematis sebagai berikut:



$$\min_{(u_1, u_2, u_3)} J = \min_{(u_1, u_2, u_3)} \int_{t_0}^{t_f} \left[A_1 E(t) + A_2 C(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t) \right] dt, \quad (4.18)$$

dengan A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 merupakan bobot dari masing-masing tujuan yang akan diminimumkan.

Prinsip minimum Pontryagin digunakan untuk mencari kontrol optimal u^* dengan penentuan fungsi Hamiltonian dari masalah optimasi tersebut. Adapun bentuk umum dari fungsi Hamiltonian sebagai berikut

$$H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) = f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u). \quad (4.19)$$

Dari persamaan (4.18) diperoleh

$$f(t, \mathbf{x}, u) = A_1 E(t) + A_2 C(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t),$$

dan dimisalkan pengali Lagrange dalam persamaan (4.18) adalah

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5)^T,$$

maka diperoleh fungsi Hamiltonian berikut

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left(A_1 E + A_2 C + \frac{B_1}{2} u_1^2 + \frac{B_2}{2} u_2^2 + \frac{B_3}{2} u_3^2 \right) + \lambda_1 \left(\Lambda + \omega H + (1 - \tau) \gamma J - \frac{(1 - \alpha u_1(t)) \beta S C}{S + E + C + J + H} - \right. \\ & \left. \rho u_2(t) S - \mu S \right) + \lambda_2 \left(\frac{(1 - \alpha u_1(t)) \beta S C}{S + E + C + J + H} - (1 - \rho u_2(t)) \theta E - \rho u_2(t) E - \mu E \right) + \lambda_3 \left((1 - \right. \\ & \left. \rho u_2(t)) \theta E - \eta u_3 C - \mu C \right) + \lambda_4 (\eta u_3(t) C - \tau \gamma J - (1 - \tau) \gamma J - \mu J) + \lambda_5 (\tau \gamma J + \rho u_2(t) S + \\ & \left. \rho u_2(t) E - \omega H - \mu H \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.20) ditentukan persamaan *state*, *costate*, serta syarat stasioner masing-masing sebagai berikut

(i) Persamaan *state*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_3} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_4} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_5} \right)^T,$$

dengan

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} = \Lambda + \omega H + (1 - \tau) \gamma J - \frac{(1 - \alpha u_1(t)) \beta S C}{S + E + C + J + H} - \rho u_2(t) S - \mu S,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} = \frac{(1 - \alpha u_1(t)) \beta S C}{S + E + C + J + H} - (1 - \rho u_2(t)) \theta E - \rho u_2(t) E - \mu E,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_3} = (1 - \rho u_2(t)) \theta E - \eta u_3 C - \mu C,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_4} = \eta u_3(t) C - \tau \gamma J - (1 - \tau) \gamma J - \mu J,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_5} = \tau \gamma J + \rho u_2(t) S + \rho u_2(t) E - \omega H - \mu H.$$

(ii) Persamaan *costate*

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} = & \left(- \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} \quad - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} \quad - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \quad - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} \quad - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \right)^T, \\ = & (\dot{\lambda}_1 \quad \dot{\lambda}_2 \quad \dot{\lambda}_3 \quad \dot{\lambda}_4 \quad \dot{\lambda}_5)^T, \end{aligned}$$

dengan



$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_1 \left(-\frac{\beta(-\alpha u_1+1)C}{S+E+C+J+H} + \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} - \rho u_2 - \mu \right) - \lambda_2 \left(-\frac{\beta(-\alpha u_1+1)C}{S+E+C+J+H} + \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} \right) - \lambda_5 \rho u_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= -A_1 - \frac{\lambda_1 \beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} - \lambda_2 \left(-\frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} - \theta(-\rho u_2 + 1) - \rho u_2 - \mu \right) - \lambda_3 \theta(-\rho u_2 + 1) - \lambda_5 \rho u_2, \\ \dot{\lambda}_3 &= -A_2 - \lambda_1 \left(-\frac{\beta(-\alpha u_1+1)S}{S+E+C+J+H} + \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} \right) - \lambda_2 \left(\frac{\beta(-\alpha u_1+1)S}{S+E+C+J+H} + \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} \right) - \lambda_3(-\eta u_3 - \mu) - \lambda_4 \eta u_3, \\ \dot{\lambda}_4 &= -\lambda_1 \left((1-\tau)\gamma + \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} \right) + \lambda_2 \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} - \lambda_4(-\tau\gamma - (1-\tau)\gamma - \mu) - \lambda_5 \tau\gamma, \\ \dot{\lambda}_5 &= -\lambda_1 \left(\omega + \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} \right) + \lambda_2 \frac{\beta(-\alpha u_1+1)SC}{(S+E+C+J+H)^2} - \lambda_5(-\mu - \omega). \end{aligned}$$

(iii) Syarat stasioner

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} \right)^T = (0 \quad 0 \quad 0)^T,$$

dengan

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = B_1 u_1 + \frac{\lambda_1 \beta \alpha SC}{N} - \frac{\lambda_2 \beta \alpha SC}{N} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = B_2 u_2 - \lambda_1 \rho S - \lambda_2 (E \rho \theta - E \rho) - \lambda_3 \theta \rho E + \lambda_5 (E \rho + S \rho \rho) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = -C \eta \lambda_3 + C \eta \lambda_4 + B_3 u_3 = 0.$$

Berdasarkan syarat stasioner di atas, maka diperoleh

$$u_1 = \frac{CS\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1)}{NB_1},$$

$$u_2 = \frac{\rho(-E\theta\lambda_2 + E\theta\lambda_3 + E\lambda_2 - E\lambda_5 + S\lambda_1 - S\lambda_5)}{B_2},$$

$$u_3 = -\frac{\eta C(\lambda_4 - \lambda_3)}{B_3}.$$

Sebelumnya telah diberikan batas untuk \mathbf{u} yaitu $0 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq u_2 \leq 1$, dan $0 \leq u_3 \leq 1$, sehingga diperoleh kontrol optimal u_1^* , u_2^* , dan u_3^* yang ditulis sebagai berikut:

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{CS\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1)}{NB_1} \right\} \right\},$$

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{\rho(-E\theta\lambda_2 + E\theta\lambda_3 + E\lambda_2 - E\lambda_5 + S\lambda_1 - S\lambda_5)}{B_2} \right\} \right\},$$

$$u_3^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{\eta C(\lambda_4 - \lambda_3)}{B_3} \right\} \right\}.$$

5. Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan jumlah populasi S , E , C , J , H dari model tanpa kontrol, dengan kontrol konstan, dan dengan kontrol optimal. Pada kontrol konstan diberikan dua kasus. Nilai parameter untuk kasus 1 yaitu $u_1 = u_2 = u_3 = 0.56$ dan untuk kasus 2 yaitu $u_1 = u_2 = u_3 = 0.26$, sehingga solusi sistem akan memunculkan empat grafik dari tiap kelasnya.



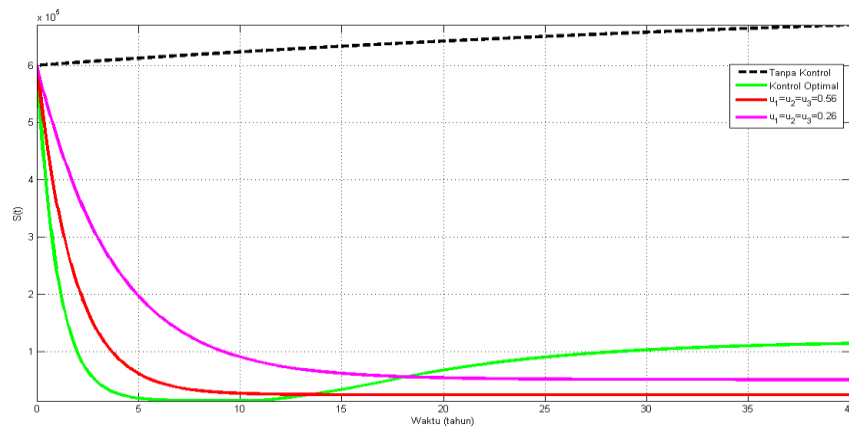
Nilai parameter-parameter yang digunakan dalam simulasi numerik model diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai Parameter untuk Simulasi Numerik

Parameter	Nilai	Sumber
Λ	12000	Fantaye (2021)
μ	0,016	Fantaye (2021)
β	0,0234	Fantaye (2021)
θ	0,2	Alemneh (2020)
γ	0,125	Fantaye (2022)
ω	0,0021	Fantaye (2022)
τ	0,06	Fantaye (2022)
α	0,95	Asumsi
ρ	0,95	Asumsi
η	0,95	Asumsi

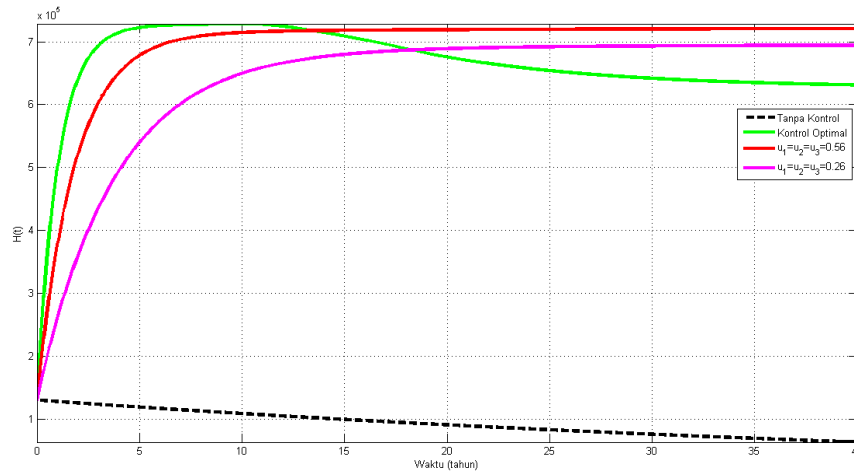
Adapun nilai awal dari variabel-variabel yang digunakan masing-masing adalah $S(0) = 600.000$ orang, $E(0) = 10.000$ orang, $C(0) = 1.600$ orang, $J(0) = 482$ orang, dan $H(0) = 130.000$ orang. Serta diberikan nilai bobot masing-masing tujuan yang akan diminumkan adalah $A_1 = 40, A_2 = 60, B_1 = 20, B_2 = 40, B_3 = 40$, dengan waktu pengamatan $t_f = 40$ tahun.

Perhatikan Gambar 2, dapat dilihat perbandingan perubahan populasi *susceptible* dan *honest*. Pada Gambar 2, terjadi perbedaan perubahan populasi yang signifikan antara populasi yang diberikan kontrol dan tanpa kontrol. Dari Gambar 2(a) populasi tanpa kontrol terus bertambah, hal ini terjadi karena adanya perpindahan dari kompartemen *honest*. Hal tersebut dapat dilihat pada Gambar 2(b), tanpa kontrol populasi *honest* mengalami penurunan. Berbeda dengan populasi *susceptible* dengan kontrol pada Gambar 2(a) mengalami penurunan, penurunan yang paling cepat terjadi pada populasi *susceptible* yang diberikan kontrol optimal. Populasi *susceptible* yang diberikan kontrol berupa edukasi dan kampanye dapat menekan perpindahan populasi *susceptible* ke kompartemen *expose*, sedangkan kontrol berupa perbaikan sistem akan berpindah ke kompartemen *honest* sehingga dari Gambar 2(b) dapat dilihat bahwa bertambahnya populasi *honest* yang paling besar yaitu populasi *honest* dengan kontrol optimal, kemudian diikuti berturut-turut dengan kontrol konstan 1 dan konstan 2.



(a)

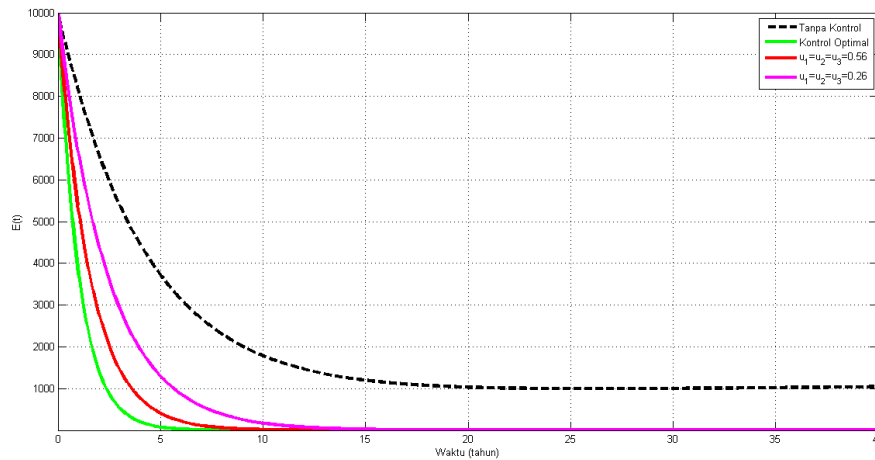




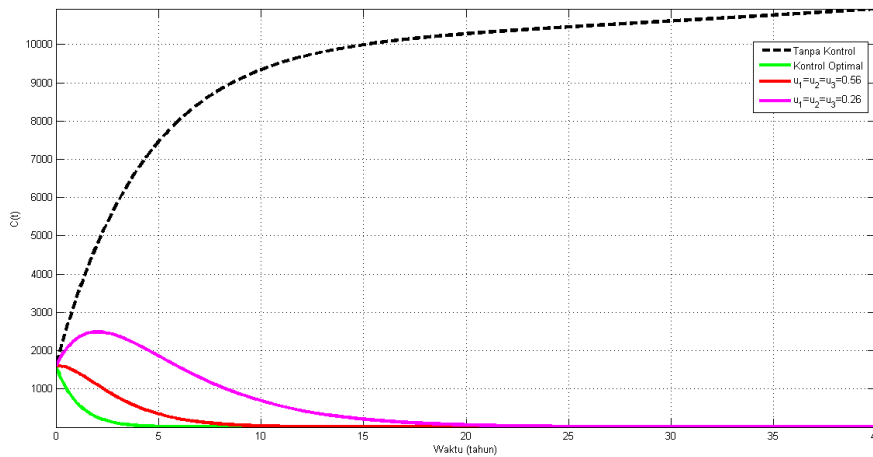
(b)

Gambar 2. Grafik perubahan populasi (a) *Susceptible*, (b) *Honest* terhadap waktu ($t = 40$ tahun)

Pemberian kontrol dalam model bertujuan untuk meminimalisir jumlah kasus korupsi. Dari Gambar 3(a) dapat dilihat bahwa terjadi perbedaan perubahan populasi *ekspose* atau terpapar dan korupsi yang signifikan antara populasi yang diberikan kontrol dengan tanpa kontrol. Tanpa kontrol populasi *expose* terus berpindah ke kompartemen *corrupt*, hal ini dapat dilihat dari grafik perubahan populasi *corrupt* yang terus meningkat pada Gambar 3(b). Dengan adanya pemberian kontrol berupa perbaikan sistem perpindahan populasi *expose* ke populasi *corrupt* dapat ditekan dan perpindahan ke populasi *honest* dapat meningkat. Penurunan jumlah populasi *expose* terbesar adalah populasi yang diberikan kontrol optimal, selanjutnya berturut-turut diikuti oleh kontrol konstan kasus 1 dan kasus 2.



(a)

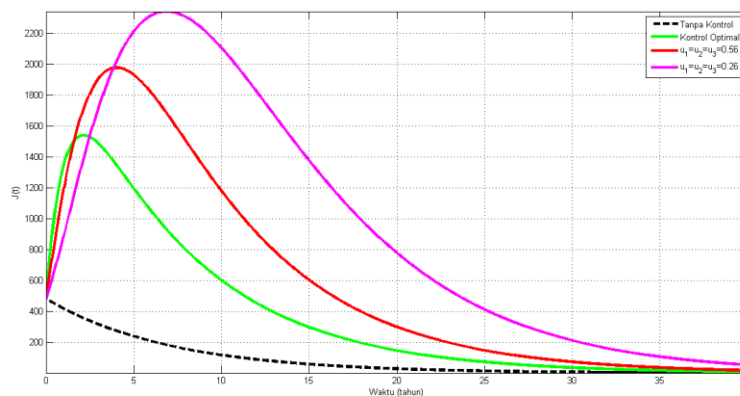


(b)

Gambar 3. Grafik perubahan populasi (a) *Exposed*, (b) *Corrupt* terhadap waktu ($t = 40$ tahun)

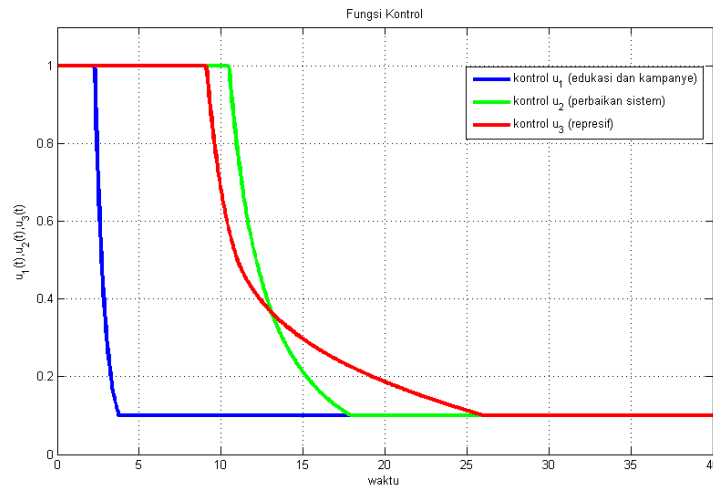
Pada gambar 4 terlihat bahwa populasi dipenjara karena kasus korupsi terus berkurang tanpa kontrol dan bertambah setelah diberikan kontrol. Kontrol berupa strategi represif yang diberikan pada populasi *corrupt* dapat menyebabkan perpindahan populasi *corrupt* ke populasi dipenjara meningkat secara signifikan. Peningkatan tercepat terjadi pada populasi yang diberikan kontrol optimal yaitu mencapai puncak pada saat $t=2$ dengan jumlah populasi 1.540 orang, diikuti kontrol konstan kasus 1 pada saat $t=4$ dengan jumlah populasi 1.979 dan terakhir kontrol konstan kasus 2 pada saat $t=7$ dengan jumlah populasi 2.342 orang.

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa terdapat tiga macam kontrol yang diberikan yaitu $u_1(t)$ atau edukasi dan kampanye, $u_2(t)$ atau perbaikan sistem, dan $u_3(t)$ atau represif. Gambar 5 menunjukkan perbandingan dari ketiga kontrol tersebut. Pada waktu awal, $u_1(t)$, $u_2(t)$ dan $u_3(t)$ mencapai nilai optimal yang berarti bahwa edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan represif dalam jumlah besar perlu dilakukan sejak awal. Seiring bertambahnya waktu proporsi populasi yang diberikan kontrol terus menurun, terlihat bahwa edukasi dan kampanye ($u_1(t)$) mulai berkurang setelah $t = 2$ sampai $t = 6$ kemudian tidak mengalami perubahan untuk t yang semakin besar. Hal ini menunjukkan bahwa edukasi dan kampanye dalam jumlah yang besar tidak perlu dilakukan secara terus menerus. Pencegahan terbesar dapat dilakukan di awal untuk menekan jumlah populasi yang terpapar dan korupsi.



Gambar 4. Grafik perubahan populasi dipenjara terhadap waktu ($t = 40$ tahun)

Pemberian perbaikan sistem ($u_2(t)$) dan strategi represif ($u_3(t)$) perlu diberikan sejak awal. Pemberian perbaikan sistem ($u_2(t)$) mulai berkurang pada saat $t = 10$ sampai $t = 18$ kemudian terus menurun hingga tidak mengalami perubahan untuk t yang semakin besar. Strategi represif ($u_3(t)$) mulai berkurang pada saat $t = 9$ sampai $t = 25$.



Gambar 5. Grafik fungsi kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$

4. Kesimpulan

Model matematika perilaku korupsi telah dikembangkan dengan menambahkan kompartemen *exposed*, serta menambahkan kontrol edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif sehingga penyebaran perilaku korupsi lebih cepat diberantas. Model matematika yang dikembangkan menghasilkan titik kesetimbangan bebas korupsi dan adanya korupsi. Titik kesetimbangan tersebut akan stabil jika memenuhi syarat yang ditetapkan oleh aturan *Routh-Hurwitz*.

Berdasarkan hasil simulasi numerik, jumlah individu yang berhenti melakukan korupsi karena dipenjara yang awalnya mencapai 353 orang dapat bertambah menjadi 1.540 dengan penerapan kontrol yang optimal. Hal ini menunjukkan bahwa peran KPK dalam memberantas korupsi dengan edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif memberikan hasil yang efektif. Pada waktu awal, $u_1(t)$, $u_2(t)$ dan $u_3(t)$ mencapai nilai optimal, seiring bertambahnya waktu, proporsi populasi yang diberikan kontrol terus menurun yang berarti bahwa pencegahan dan pemberantasan korupsi terbesar dapat dilakukan di awal namun tidak perlu dilakukan dengan proporsi yang besar secara terus menerus.

DAFTAR PUSTAKA

Adelina., 2018. *Bentuk-bentuk Korupsi Politik*. Jurnal Legislasi Indonesia, Volume 16(1).



- Alemneh, H.T., 2020. *Mathematical Modeling, Analysis, and Optimal Control of Corruption Dynamics*. Journal of Applied Mathematics, Volume 2020, 13. doi:10.1155/2022/8073877.
- Aziz, T.A., 2005. *The Cancer of Corruptor*. New Delhi: Chetana Publication.
- Boyce, W.E. and DiPrima, R.C., 2012. *Elementary Differential Equations*. 10th Edition Penyunt. United States : John Wiley & Sons.
- Danford, O., Kimathi, M., Mirau, S., 2020. *Mathematical Modeling and Analysis of Corruption Dynamics with Control Measures in Tanzania*. Jurnal of Mathematics and Informatics 19, 2020, 57-79. doi:10.22457/jmi.v19a07179.
- Driessche. and Watmough.,2002. *Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*. Mathematical Biosciences.
- Fantaye, A.K., and Birhanu, Z.K., 2021. *Mathematical Model and Analysis of Corruption Dynamics with Optimal Control*. Hindawi Journal of Applied Mathematics, Volume 2022. doi: 10.1155/2022/8073877.
- Fatkhuri., 2015. *Korupsi dalam Birokrasi dan Strategi Pencegahannya*. Jurnal Ilmiah Manajemen Publik dan Kebijakan Sosial-Vol.1 No.2.
- Frinizio,Ladas. (1988). *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga : Jakarta.
- Hamzah, A.,2008. *Pemberantasan Korupsi Melalui Hukum Pidana Nasional & Internasional*. Jakarta : Rajawali Pers.
- J.Nye (1967). *Corruption and Political Development : A Cost-Benefit Analisis dalam R.William (ed), The Politics of Corruption, Explaining Corruption, Checktenham*. UK: An Edward Elgar Publishing Limited.
- KPK, 2021. *3 Strategi Pemberantasan Korupsi*. <https://aclc.kpk.go.id/materi/berpikir-kritis-terhadap-korupsi/infografis/3-strategi-pemberantasan-korupsi>. [Accessed 28 Juli 2021].
- Lemecha, L., and Feyissa, S., 2008. *Mathematical Modeling and Analysis Corruption Dynamics*. Ethiopian Journal of Science and Sustainable Development (EJSSD), Volume 5 (2).
- Lenhart, S., and Workman, J.T., 2007. *Optimal Control Applied to Biological Models*. Edisi pertama. Chapman and Hall/CRC, London.
- O.M. Nathan, K.O (2019). *Stability Analysis in a Mathematical Model of Corruption in Kenya*. Asian Research Journal of Mathematics, 1-15.
- Rinakit, Sukardi (2005). *The Indonesian Military After The New Order*. Copenhagen S, Denmark: NIAS Press.
- Toni, B (2014). *Kontrol Optimum Prinsip Minimum Pontryagin*. Departemen Matematika IPB.
- Widowati & Sutimin (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang : Universitas Diponegoro.
- Winggins, S., 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer New York, New York.Doi: 10.1007/b97481.

