

DIMENSI METRIK DARI GRAF JARING LABA-LABA

Tuhfatul Janan¹, Syifaul Janan²

Sekolah Tinggi Agama Islam Muhammadiyah Probolinggo¹

Zenius Education²

Email: tuhfatuljanan4@gmail.com¹, syifauljanan82@gmail.com²

Abstrak. Dimensi metrik dari graf terhubung G adalah kardinalitas dari himpunan pembeda minimum dari G , dimana W disebut himpunan pembeda dari G jika $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$. Graf jaring laba-laba dikonstruksi dari graf bintang S_n sebanyak 1 dan graf sikel C_n sebanyak m . Konstruksi graf tersebut melibatkan definisi dari $C_n(m)$ yang menyatakan graf sikel C_n ke- m , dengan $V(C_n(m)) = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dan $V(S_n) = \{u, a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dengan u sebagai titik pusatnya, dimana $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Dari hasil penelitian, diperoleh dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ adalah 3.

Kata Kunci: Dimensi Metrik, Graf Jaring Laba-Laba

Abstract. The metric dimension of the connected graph G is a cardinality of the minimum distinguishing set of G , where W is called the distinguishing set of G if $r(v|W)$ is different for each $v \in V(G)$. This research aims to determine the metric dimension of spider web graph $R_{m,n}$. The spider web graph is constructed from a star graph S_n and m cycle graph C_n . The graph construction involves the definition of $C_n(m)$ which represents the m^{th} cycle graph C_n , where $V(C_n(m)) = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ and $V(S_n) = \{u, a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ with u as the center point, where $m \in \mathbb{N}$ and $n \geq 3$. Based on the results of this research, the metric dimension of spider web graph $R_{m,n}$ was 3.

Keywords: Metric Dimension, Spider Web Graph

A. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu anggota dari ilmu eksakta yang memiliki peranan sangat penting bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi (Sukmawati & Amelia, 2020). Matematika merupakan ilmu yang dapat melatih kemampuan untuk berpikir secara kritis, logis, kreatif, cermat, dan teliti sehingga dapat menjadi pemecah masalah yang baik (Noprianilubis et al., 2017). Salah satu cabang dari matematika yang dapat mendukung tercapainya kemampuan tersebut adalah teori graf. Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong dengan elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan dengan elemen-elemennya adalah pasangan tak terurut dua elemen berbeda dari V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dari graf G dinotasikan dengan $E(G)$ (Gould, 2013).

Salah satu topik penelitian dalam teori graf yang telah berkembang adalah dimensi metrik. Topik ini pertama kali diperkenalkan oleh (Slater, 1975) dan secara terpisah oleh (Melter & Harary, 1976) pada jurnal yang berjudul *on the metric dimension of a graph*. Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan u dan v adalah titik-titik dalam G , maka panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dinotasikan $d(u, v)$. Jika $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik v di $V(G)$, maka representasi dari titik v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), (v, w_2), \dots, (v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$, maka W disebut himpunan pembeda dari G . Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari G disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G . Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum tersebut disebut dengan dimensi metrik dari G , dan dinotasikan dengan $\dim G$ (Chartrand et al., 2000). Konsep dimensi metrik sering diaplikasikan dalam beberapa permasalahan seperti pada pemasangan sensor kebakaran dan



penemuan sumber sebaran dalam suatu jaringan (Tillquist et al., 2021).

Beberapa penelitian terdahulu mengenai dimensi metrik dari beberapa jenis graf adalah karakterisasi dimensi metrik dari graf lintasan dan pengelompokan nilai dimensi metrik dari graf terhubung (Chartrand et al., 2000), dimensi metrik dari graf yang memiliki titik berderajat satu (Iswadi et al., 2010), dimensi metrik dari graf dual antiprisma (FITRIANI & CAHYANINGTIAS, 2021), dimensi metrik dari graf bipartit regular (Bača et al., 2011), dimensi metrik pada graf buku ganda (Ilmayasinta, 2019), dimensi metrik lokal pada graf antiprisma dan graf Sun (Khoiriah & Kusmayadi, 2018), dimensi metrik dan dimensi partisi dari famili graf tangga (Saifudin, 2016), dan dimensi metrik dari beberapa graf yang memuat siklus dan nilai dimensi metriknya konstan (Ali et al., 2012).

Graf jaring laba-laba merupakan suatu graf jenis baru yang didefinisikan pada penelitian ini. Graf tersebut berbeda dengan graf jaring laba-laba yang diteliti oleh (Setianggoro et al., 2012). Graf jaring laba-laba pada penelitian ini dikonstruksi dari graf bintang dan graf siklus dengan kondisi tertentu. Pada penelitian ini, akan ditentukan dimensi metrik dari graf jaring laba-laba.

B. Metode Penelitian

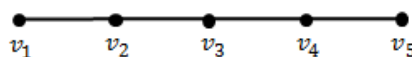
Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Mengkonstruksi graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ dari graf bintang dan graf siklus.
2. Menentukan secara berturut-turut dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{2,3}$, $R_{4,3}$, $R_{m,3}$, $R_{m,4}$, dan $R_{m,n}$.
3. Membuktikan dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$.

C. Graf Khusus

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi dan teorema dari graf khusus yang menjadi landasan dalam penelitian ini.

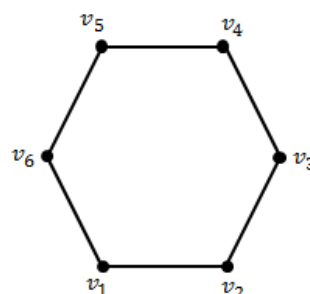
Definisi 1. Graf path adalah graf dengan order $n \geq 1$ dan terdiri atas satu path. Graf path dengan order n dinotasikan dengan P_n .



Gambar 1. Graf Path P_5

Teorema 2. Graf G merupakan graf path jika dan hanya jika $\dim = 1$ (Melter & Harary, 1976).

Definisi 3. Graf siklus adalah graf dengan order $n \geq 3$ dan terdiri atas satu siklus. Graf siklus dengan order n dinotasikan dengan C_n .



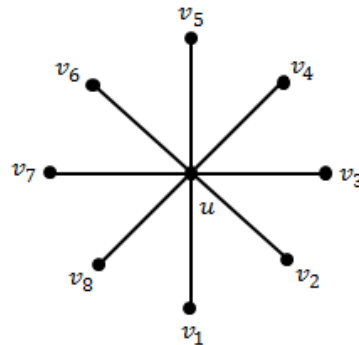
Gambar 2. Graf Sikel C_6

Definisi 4. Graf bipartit lengkap adalah graf dengan setiap titik pada $V_1(G)$ terhubung dengan setiap titik pada $V_2(G)$. Graf bipartit lengkap dengan $|V_1(G)| = m$ dan $|V_2(G)| = n$ dinotasikan dengan $K_{m,n}$.



Gambar 3. Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$

Definisi 5. Graf bintang adalah graf bipartit lengkap $K_{1,n}$ dan dinotasikan dengan S_n .



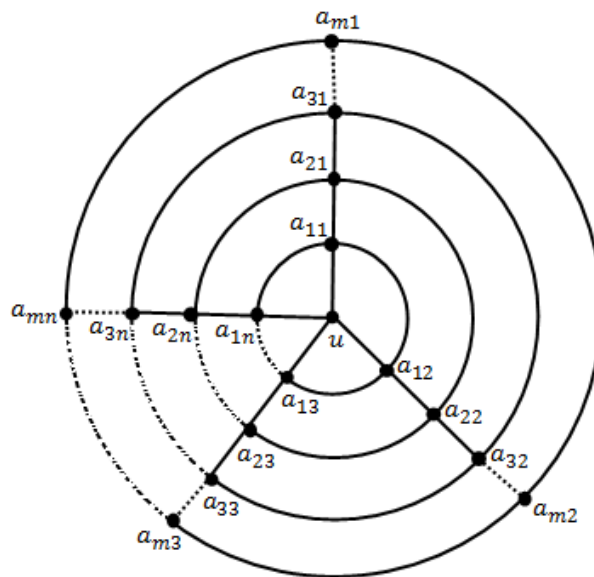
Gambar 4. Graf Bintang S_8

D. Graf Jaring Laba-Laba

Pada bagian ini, diberikan konstruksi dari graf jaring laba-laba. Ambil sebarang graf bintang S_n sebanyak 1 dan graf siklus C_n sebanyak m . Misalkan notasi $C_n(m)$ menyatakan graf siklus C_n ke- m , dengan $V(C_n(m)) = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dan $V(S_n) = \{u, a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dengan u sebagai titik pusatnya, dimana $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Selanjutnya, akan dikonstruksi graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan $R_{m,n}$ sebagai berikut :

1. Tempatkan graf $C_n(1)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga
titik a_{11} terletak pada garis ua_{m1} ,
titik a_{12} terletak pada garis ua_{m2} ,
titik a_{13} terletak pada garis ua_{m3} ,
:
titik a_{1n} terletak pada garis ua_{mn} .
2. Tempatkan graf $C_n(2)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga
titik a_{21} terletak pada garis $a_{11}a_{m1}$,
titik a_{22} terletak pada garis $a_{12}a_{m2}$,
titik a_{23} terletak pada garis $a_{13}a_{m3}$,
:
titik a_{2n} terletak pada garis $a_{1n}a_{mn}$.
3. Tempatkan graf $C_n(3)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga
titik a_{31} terletak pada garis $a_{21}a_{m1}$,
titik a_{32} terletak pada garis $a_{22}a_{m2}$,
titik a_{33} terletak pada garis $a_{23}a_{m3}$,
:
titik a_{3n} terletak pada garis $a_{2n}a_{mn}$.
:
:

- $m - 1$. Tempatkan graf $C_n(m - 1)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga titik $a_{(m-1)1}$ terletak pada garis $a_{(m-2)1}a_{m1}$, titik $a_{(m-1)2}$ terletak pada garis $a_{(m-2)2}a_{m2}$, titik $a_{(m-1)3}$ terletak pada garis $a_{(m-2)3}a_{m3}$,
 $\vdots$
 titik $a_{(m-1)n}$ terletak pada garis $a_{(m-2)n}a_{mn}$.
- m . Konstruksi graf $C_n(m)$ dengan cara membuat garis $a_{mj}a_{m(j+1)}$, dengan $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $a_{m(n+1)} = a_{m1}$.
- Dengan demikian, diperoleh graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ seperti pada gambar berikut :



Gambar 5. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

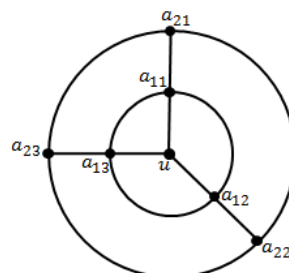
E. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bagian ini, mula-mula akan diberikan konjektur dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$.

1. Konjektur dari Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

Misalkan W adalah himpunan terurut dan W^* adalah himpunan pembeda dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$. Perhatikan bahwa graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ bukan graf path, maka berdasarkan Teorema 2, diperoleh $\dim R_{m,n} > 1$.

1. Untuk $n = 3$
 - (i). Untuk $m = 2$



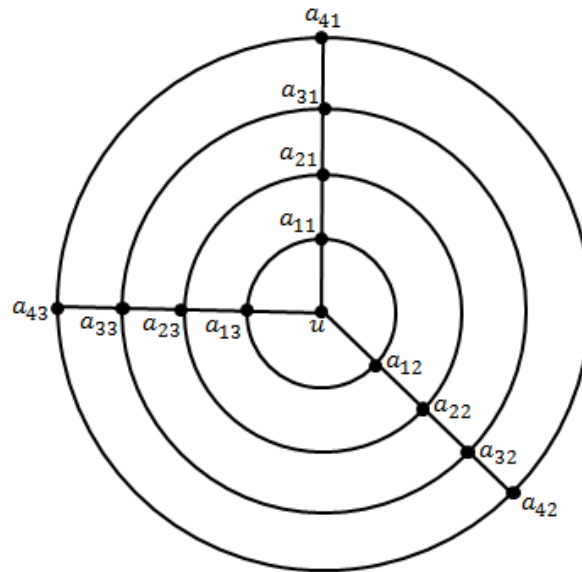
Gambar 6. Graf Jaring Laba-Laba $R_{2,3}$

Pilih $W = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$, sehingga diperoleh
 $r(u|W) = (d(u, a_{21}), d(u, a_{22}), d(u, a_{23})) = (2, 2, 2)$

$$\begin{aligned}r(a_{11}|W) &= (d(a_{11}, a_{21}), d(a_{11}, a_{22}), d(a_{11}, a_{23})) = (1, 2, 2) \\r(a_{12}|W) &= (d(a_{12}, a_{21}), d(a_{12}, a_{22}), d(a_{12}, a_{23})) = (2, 1, 2) \\r(a_{13}|W) &= (d(a_{13}, a_{21}), d(a_{13}, a_{22}), d(a_{13}, a_{23})) = (2, 2, 1) \\r(a_{21}|W) &= (d(a_{21}, a_{21}), d(a_{21}, a_{22}), d(a_{21}, a_{23})) = (0, 1, 1) \\r(a_{22}|W) &= (d(a_{22}, a_{21}), d(a_{22}, a_{22}), d(a_{22}, a_{23})) = (1, 0, 1) \\r(a_{23}|W) &= (d(a_{23}, a_{21}), d(a_{23}, a_{22}), d(a_{23}, a_{23})) = (1, 1, 0)\end{aligned}$$

Dengan demikian, $W = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{2,3} = 3$.

(ii). Untuk $m = 4$



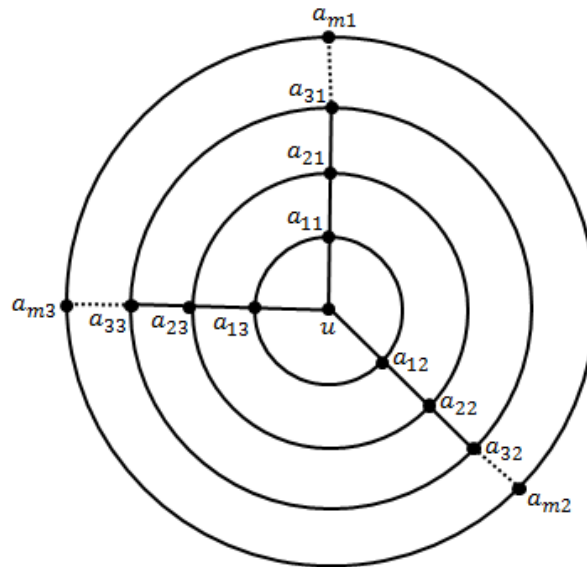
Gambar 7. Graf Jaring Laba-Laba $R_{4,3}$

Pilih $W = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}\}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}r(u|W) &= (d(u, a_{41}), d(u, a_{42}), d(u, a_{43})) = (4, 4, 4) \\r(a_{11}|W) &= (d(a_{11}, a_{41}), d(a_{11}, a_{42}), d(a_{11}, a_{43})) = (3, 4, 4) \\r(a_{12}|W) &= (d(a_{12}, a_{41}), d(a_{12}, a_{42}), d(a_{12}, a_{43})) = (4, 3, 4) \\r(a_{13}|W) &= (d(a_{13}, a_{41}), d(a_{13}, a_{42}), d(a_{13}, a_{43})) = (4, 4, 3) \\r(a_{21}|W) &= (d(a_{21}, a_{41}), d(a_{21}, a_{42}), d(a_{21}, a_{43})) = (2, 3, 3) \\r(a_{22}|W) &= (d(a_{22}, a_{41}), d(a_{22}, a_{42}), d(a_{22}, a_{43})) = (3, 2, 3) \\r(a_{23}|W) &= (d(a_{23}, a_{41}), d(a_{23}, a_{42}), d(a_{23}, a_{43})) = (3, 3, 2) \\r(a_{31}|W) &= (d(a_{31}, a_{41}), d(a_{31}, a_{42}), d(a_{31}, a_{43})) = (1, 2, 2) \\r(a_{32}|W) &= (d(a_{32}, a_{41}), d(a_{32}, a_{42}), d(a_{32}, a_{43})) = (2, 1, 2) \\r(a_{33}|W) &= (d(a_{33}, a_{41}), d(a_{33}, a_{42}), d(a_{33}, a_{43})) = (2, 2, 1) \\r(a_{41}|W) &= (d(a_{41}, a_{41}), d(a_{41}, a_{42}), d(a_{41}, a_{43})) = (0, 1, 1) \\r(a_{42}|W) &= (d(a_{42}, a_{41}), d(a_{42}, a_{42}), d(a_{42}, a_{43})) = (1, 0, 1) \\r(a_{43}|W) &= (d(a_{43}, a_{41}), d(a_{43}, a_{42}), d(a_{43}, a_{43})) = (1, 1, 0)\end{aligned}$$

Dengan demikian, $W = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{4,3} = 3$.

(iii). Untuk $m \in \mathbb{N}$



Gambar 8. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,3}$

Pilih $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\}$, sehingga diperoleh

$$r(u|W) = (d(u, a_{m1}), d(u, a_{m2}), d(u, a_{m3})) = (m, m, m)$$

$$r(a_{11}|W) = (d(a_{11}, a_{m1}), d(a_{11}, a_{m2}), d(a_{11}, a_{m3})) = (m-1, m, m)$$

$$r(a_{12}|W) = (d(a_{12}, a_{m1}), d(a_{12}, a_{m2}), d(a_{12}, a_{m3})) = (m, m-1, m)$$

$\vdots$

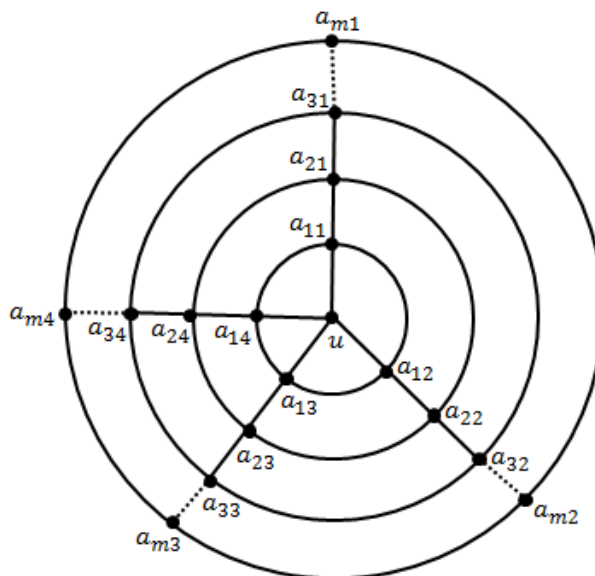
$$r(a_{m2}|W) = (d(a_{m2}, a_{m1}), d(a_{m2}, a_{m2}), d(a_{m2}, a_{m3})) = (1, 0, 1)$$

$$r(a_{m3}|W) = (d(a_{m3}, a_{m1}), d(a_{m3}, a_{m2}), d(a_{m3}, a_{m3})) = (1, 1, 0)$$

Dengan demikian, $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda.

Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{m,3} = 3$.

2. Untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $n = 4$



Gambar 9. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,4}$

Pilih $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\}$, sehingga diperoleh

$$r(u|W) = (d(u, a_{m1}), d(u, a_{m2}), d(u, a_{m3})) = (m, m, m)$$



$$r(a_{11}|W) = (d(a_{11}, a_{m1}), d(a_{11}, a_{m2}), d(a_{11}, a_{m3})) = (m-1, m, m+1)$$

$$r(a_{12}|W) = (d(a_{12}, a_{m1}), d(a_{12}, a_{m2}), d(a_{12}, a_{m3})) = (m, m-1, m)$$

$$r(a_{13}|W) = (d(a_{13}, a_{m1}), d(a_{13}, a_{m2}), d(a_{13}, a_{m3})) = (m+1, m, m-1)$$

⋮
⋮

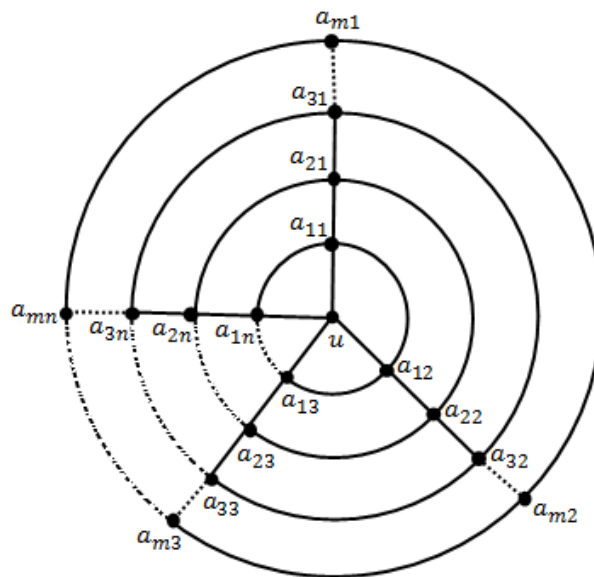
$$r(a_{m1}|W) = (d(a_{m1}, a_{m1}), d(a_{m1}, a_{m2}), d(a_{m1}, a_{m3})) = (0, 1, 2)$$

$$r(a_{m2}|W) = (d(a_{m2}, a_{m1}), d(a_{m2}, a_{m2}), d(a_{m2}, a_{m3})) = (1, 0, 1)$$

$$r(a_{m3}|W) = (d(a_{m3}, a_{m1}), d(a_{m3}, a_{m2}), d(a_{m3}, a_{m3})) = (2, 1, 0)$$

Dengan demikian, $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{m,4} = 3$.

3. Untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$



Gambar 10. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

Berdasarkan pola di atas, dapat disimpulkan bahwa $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{m,n} = 3$.

Selanjutnya, akan diberikan pembuktian dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$.

2. Dimensi Metrik dari Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

Ambil sebarang graf bintang S_n sebanyak 1 dan graf siklus C_n sebanyak m . Misalkan notasi $C_n(m)$ menyatakan graf siklus C_n ke- m , dengan $V(C_n(m)) = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dan $V(S_n) = \{u, a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dengan u sebagai titik pusatnya, dimana $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Misalkan W adalah himpunan terurut dan W^* adalah himpunan pembeda dari graf $R_{m,n}$. Perhatikan bahwa graf $R_{m,n}$ bukan graf path, maka berdasarkan **Teorema 2**, diperoleh $\dim R_{m,n} > 1$.

1. Untuk $|W| = 1$ (tidak memenuhi berdasarkan Teorema 2)

Bukti :

(i). Jika W memuat titik u , yaitu $W = \{u\}$

Perhatikan bahwa $r(a_{11}|W) = (1)$

$(a_{12}|W) = (1)$

Karena $r(a_{11}|W) = r(a_{12}|W)$, maka W dengan $|W| = 1$ dan W memuat titik u , bukan himpunan pembeda.

- (ii). Jika W tidak memuat titik u , yaitu $W = \{a_{ij} | i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\}$
Perhatikan bahwa $r(a_{i(j-1)} | W) = (1)$
 $r(a_{i(j+1)} | W) = (1)$
Karena $r(a_{i(j-1)} | W) = r(a_{i(j+1)} | W)$, maka W dengan $|W| = 1$ dan W tidak memuat titik u , bukan himpunan pembeda.
2. Untuk $|W| = 2$
- (i). Jika W memuat titik u , yaitu $W = \{u, a_{ij} | i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\}$
Perhatikan bahwa $r(a_{i(j-1)} | W) = (i, 1)$
 $r(a_{i(j+1)} | W) = (i, 1)$
Karena $r(a_{i(j-1)} | W) = r(a_{i(j+1)} | W)$, maka W dengan $|W| = 2$ dan W memuat titik u , bukan himpunan pembeda.
- (ii). Jika W tidak memuat titik u , yaitu $W = \{a_{ij}, a_{kl} | i, k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, j, l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, ij \neq kl\}$. Dapat ditemukan a_{xy} dan a_{zw} dengan $x, z \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, y, w \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $xy \neq zw$ sedemikian hingga $r(a_{xy} | W) = r(a_{zw} | W)$. Sehingga W dengan $|W| = 2$ dan W tidak memuat titik u , bukan himpunan pembeda.
3. Untuk $|W| = 3$, yaitu $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\}$
Perhatikan bahwa $r(u | W) = (d(u, a_{m1}), d(u, a_{m2}), d(u, a_{m3})) = (m, m, m)$
 $r(a_{11} | W) = (d(a_{11}, a_{m1}), d(a_{11}, a_{m2}), d(a_{11}, a_{m3})) = (m-1, m, m+1)$
 $r(a_{12} | W) = (d(a_{12}, a_{m1}), d(a_{12}, a_{m2}), d(a_{12}, a_{m3})) = (m, m-1, m)$
 $r(a_{13} | W) = (d(a_{13}, a_{m1}), d(a_{13}, a_{m2}), d(a_{13}, a_{m3})) = (m+1, m, m-1)$
 $\vdots$
 $r(a_{21} | W) = (d(a_{21}, a_{m1}), d(a_{21}, a_{m2}), d(a_{21}, a_{m3})) = (m-2, m-1, m)$
 $r(a_{22} | W) = (d(a_{22}, a_{m1}), d(a_{22}, a_{m2}), d(a_{22}, a_{m3})) = (m-1, m-2, m-1)$
 $r(a_{23} | W) = (d(a_{23}, a_{m1}), d(a_{23}, a_{m2}), d(a_{23}, a_{m3})) = (m, m-1, m-2)$
 $\vdots$
 $r(a_{31} | W) = (d(a_{31}, a_{m1}), d(a_{31}, a_{m2}), d(a_{31}, a_{m3})) = (m-3, m-2, m-1)$
 $r(a_{32} | W) = (d(a_{32}, a_{m1}), d(a_{32}, a_{m2}), d(a_{32}, a_{m3})) = (m-2, m-3, m-2)$
 $r(a_{33} | W) = (d(a_{33}, a_{m1}), d(a_{33}, a_{m2}), d(a_{33}, a_{m3})) = (m-1, m-2, m-3)$
 $\vdots$
 $r(a_{m1} | W) = (d(a_{m1}, a_{m1}), d(a_{m1}, a_{m2}), d(a_{m1}, a_{m3})) = (0, 1, 2)$
 $r(a_{m2} | W) = (d(a_{m2}, a_{m1}), d(a_{m2}, a_{m2}), d(a_{m2}, a_{m3})) = (1, 0, 1)$
 $r(a_{m3} | W) = (d(a_{m3}, a_{m1}), d(a_{m3}, a_{m2}), d(a_{m3}, a_{m3})) = (2, 1, 0)$
 $\vdots$
 $r(a_{m(n-2)} | W) = (d(a_{m(n-2)}, a_{m1}), d(a_{m(n-2)}, a_{m2}), d(a_{m(n-2)}, a_{m3})) = (3, 4, 5)$
 $r(a_{m(n-1)} | W) = (d(a_{m(n-1)}, a_{m1}), d(a_{m(n-1)}, a_{m2}), d(a_{m(n-1)}, a_{m3})) = (2, 3, 4)$
 $r(a_{mn} | W) = (d(a_{mn}, a_{m1}), d(a_{mn}, a_{m2}), d(a_{mn}, a_{m3})) = (1, 2, 3)$
Dengan demikian, diperoleh $r(a_{ij} | W) \neq r(a_{kl} | W)$ dengan $i, k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, j, l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $ij \neq kl$. Akibatnya, $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan

pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{m,n} = 3$.

F. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian di atas, diperoleh dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ adalah 3.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, M., Rahim, M. T., & Ali, G. (2012). On two families of graphs with constant metric dimension. *Journal of Prime Research in Mathematics*, 8(January), 95–101.
- Bača, M., Baskoro, E. T., Salman, A. N. M., Saputro, S. W., & Suprijanto, D. (2011). The metric dimension of regular bipartite graphs. *Bulletin Mathématique de La Société Des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 54 (102)(1), 15–28. <http://www.jstor.org/stable/43679200>
- Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105(1), 99–113. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(00\)00198-0](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0166-218X(00)00198-0)
- FITRIANI, F., & CAHYANINGTIAS, S. (2021). Graf Dual Antiprisma Dan Dimensi Metriknya. *E-Jurnal Matematika*, 10(1), 6. <https://doi.org/10.24843/mtk.2021.v10.i01.p313>
- Gould, R. (2013). *Graph Theory*. Dover Publications. <https://books.google.co.id/books?id=Va8AAQAAQBAJ>
- Ilmayasinta, N. (2019). Dimensi Metrik Pada Graf Buku Ganda. *Vygotsky*, 1(1), 21. <https://doi.org/10.30736/vj.v1i1.89>
- Iswadi, H., Baskoro, E. T., Salman, A. N. M., & Simanjuntak, R. (2010). The resolving graph of amalgamation of cycles. *Utilitas Mathematica*, 83, 121–132.
- Khoiriah, S., & Kusmayadi, T. A. (2018). Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Antiprisma Dan Graf Sun. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 8(1), 9–15. <https://doi.org/10.20961/jmme.v8i1.25816>
- Melter, F. H., & Harary, F. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars Combin*, 2, 191–195.
- Noprianilubis, J., Panjaitan, A., Surya, E., & Syahputra, E. (2017). *Analysis Mathematical Problem Solving Skills of Student of the Grade VIII-2 Junior High School Bilah Hulu Labuhan Batu*. 4(2), 131–137.
- Saifudin, I. (2016). Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga. *Justindo*, 49, 105–112. http://repository.unmuhjember.ac.id/91/1/DAFTAR_ARTIKEL_PENELITIAN_ILHAM_SAIFUDIN.pdf



Setianggoro, A. B., Studi, P., Matematika, P., Keguruan, F., Ilmu, D. A. N., & Jember, U. (2012). *Nilai Ketakteraturan Total Sisi Dari Graf Jaring Laba-Laba (Web) Nilai Ketakteraturan Total Sisi*.

Slater, P. J. (1975). Leaves of trees. *Congr. Numer*, 14(549–559), 37.

Sukmawati, S., & Amelia, R. (2020). *Analisis kesalahan siswa smp dalam menyelesaikan soal materi segiempat berdasarkan teori nolting 1,2. 3*(5), 423–432. <https://doi.org/10.22460/jpmi.v3i5.423-432>

Tillquist, R. C., Frongillo, R. M., & Lladser, M. E. (2021). *Getting the Lay of the Land in Discrete Space: A Survey of Metric Dimension and its Applications*. 1–29.

