PROXIMAL
JURNAL PENELITIAN MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

Karakteristik Ideal pada Seminear-Ring dan Seminear-Ring Sederhana

Meryta Febrilian Fatimah[1], Ahmad Ansar[2]
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat, Majene, Indonesia[1,2]
Email: merytaff@unsulbar.ac.id[1], ahmad.ansar@unsulbar.ac.id [2]

Abstrak. Penelitian ini adalah penelitian pengembangan dari hasil generalisasi semiring dan near-ring yang disebut seminear-ring. Diberikan seminear-ring S. Ideal pada seminear-ring S didefinisikan dengan cara yang sama seperti ideal pada semiring. Oleh karena itu, akan diidentifikasi beberapa jenis ideal dan sifat-sifatnya pada S yaitu ideal prima, ideal semiprima, ideal prima lengkap dan ideal semiprima lengkap. Selanjutnya, Ideal kiri (kanan) $Sa(aS) = S$ berakibat S seminear-ring sederhana kiri (kanan). Lebih lanjut untuk $(Sa)S = S$ maka S merupakan seminear-ring sederhana. Konsep ideal pada seminear-ring akan diperkenalkan lebih khusus pada penelitian ini.

Kata Kunci: Seminear-Ring, Ideal Prima, Ideal Semiprima, Seminear-Ring Sederhana.

Abstract. This paper is a research and development which aims to generalize semiring and near-ring called seminear-ring. Let S be a seminear-ring. Ideal on seminear-ring S is defined equally to ideal on semiring. The purpose of this paper is to identify some property of Ideal in S, namely prime ideal, semiprime ideal, completely prime ideal, and completely semiprime ideal. Furthermore, any left (right) ideal $Sa(aS) = S$ constructed S as left (right) simple seminear-ring. Moreover, if $(Sa)S = S$, then S is simple. Ideal concept on seminear-ring is given.

Keywords: Seminear-Ring, Prime Ideal, Semiprime Ideal, Simple Seminear-Ring.

A. Pendahuluan

Ring adalah sebuah himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ dengan syarat R terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif, terhadap operasi perkalian merupakan semigrup serta terhadap operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif kiri dan kanan yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$ (Dummit & Foote, 2004). Ring R dengan tambahan sifat komutatif terhadap operasi perkalian disebut dengan ring komutatif. Selanjutnya apabila ring komutatif R dengan elemen satuan di mana setiap elemen tak nol di R memiliki invers terhadap operasi perkaliannya disebut dengan lapangan (Malik, Mordeson, & Sen, 1997). Dengan demikian, ring R dengan elemen satuan yang diperlemah yaitu dengan menghilangkan eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahan membentuk struktur baru yang disebut dengan semiring dan dinotasikan dengan $(S, +,\cdot)$ (Golan, 2013). Beberapa hasil pada ring dapat ditemukan pada semiring, namun sebaliknya belum tentu berlaku. Seperti ideal subtraktif atau k-ideal pada semiring yang tidak dapat ditemukan definisinya pada ring (Atani, 2013). Sehingga dapat diketahui bahwa setiap ring R merupakan semiring, tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Selanjutnya, near-ring adalah himpunan tak kosong N yang dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ di mana N terhadap operasi penjumlahannya grup (tidak harus abelian), N terhadap operasi perkaliannya juga semigrup serta N terhadap kedua operasi penjumlahan dan perkaliannya memenuhi hukum distributif kanan (Pilz, 1983). Berdasarkan hasil yang diperoleh dari semiring dan near-ring, didefinisikan struktur aljabar baru yang disebut seminear-ring. Seminear-ring adalah himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian di mana S terhadap operasi penjumlahan serta perkalian semigrup dan S terhadap kedua operasi memenuhi hukum distributif kanan seperti pada near-ring (Kornthorng & Iampan, 2012). Sehingga setiap near-ring merupakan seminear-ring tetapi belum tentu berlaku sebaliknya. Sebagai contoh pada himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian merupakan seminear-ring tetapi $(\mathbb{N},+,\cdot)$ bukanlah near-ring sebab, $(\mathbb{N},+)$ bukan merupakan grup.

Konsep seminear-ring sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Willy G. van Hoorn dan B. van Rootselar pada tahun 1967 dalam artikel (Van & Van, 1967). Secara umum, seminear-ring merupakan hasil generalisasi dari semiring dan near-ring. Sehingga definisi ideal pada seminear-ring dapat didefinisikan dengan cara yang serupa dengan semiring dan near-ring. Beberapa hasil mengenai ideal pada seminear-ring telah diperoleh, yaitu (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) membahas tentang homomorfisma pada seminear-ring dan pembentukan seminear-ring kuosien. Paper (Perumal & Chinnaraj, 2015)membahas tentang medial bipotent kiri pada seminear-ring, (Perumal, Arulprakasam, & Radhakrishnan, 2018) membahas tentang beberapa definisi dan sifat-sifat ideal pada seminear-ring, (Ayaragarnchanakul & Mitchell, 1994) membahas tentang division seminear-ring, ideal prima kuat pada seminear-ring telah dibahas oleh (Koppula, Srinivas, & Prasad, 2020), serta ideal prima lemah pada seminear-ring telah dibahas di (Senthil & Perumal, 2020). Dilain pihak, (Shabir & Ahmed, 2007) telah membahas seminear-ring reguler lemah. Oleh karena itu, dalam tulisan kali ini akan dibahas beberapa perilaku ideal pada seminear-ring yaitu perilaku ideal pada seminear-ring, seperti ideal prima dan semiprima, $(A{:}B)$ sebagai ideal akan melibatkan hubungan A dan B. Diidentifikasi pula himpunan $(A{:}B)$ sebagai ideal apabila A merupakan ideal semiprima lengkap, annihilator kiri dan kanan sebagai ideal. Lebih lanjut, akan diidentifikasi bahwa apabila ideal kiri (kanan) $Sa(aS) = S$ apakah S merupakan seminear-ring sederhana kiri (kanan) serta jika $(Sa)S = S$ maka S juga merupakan seminear-ring sederhana.

Dalam tulisan ini permasalahan dibatasi pada pembahasan tentang konsep ideal pada seminear-ring, ideal prima, ideal semiprima pada seminear-ring serta seminear-ring sederhana. Selanjutnya, untuk dapat memahami sifat-sifat ideal, diberikan pula definisi insertion of ideals factors property menurut (Baek & etc., 2014).

B. Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang akan digunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Mempelajari artikel karya (Perumal, Arulprakasam, & Radhakrishnan, 2018) dengan judul A Note on Ideals in Seminear-Rings. Artikel ini membahas tentang definisi serta sifat-sifat ideal pada seminear-ring diantaranya adalah ideal (ideal kanan dan ideal kiri), ideal prima, ideal semiprima, nil ideal, ideal semiprima lengkap, ideal prima lengkap, ideal prima tegas, serta ideal prima minimal pada seminear-ring.
2. Mempelajari sifat-sifat struktur seminear-ring yang telah dikaji sebelumnya melalui penelusuran literatur-literatur terkait. Seperti definisi dan sifat-sifat ideal lainnya pada seminear-ring yaitu c-ideal pada seminear-ring, annihilator kanan dan kiri pada seminear-ring, seminear-ring sederhana, dan sifat penyisipan faktor pada seminear-ring.
3. Mempelajari perilaku ideal kiri pada seminear-ring, perilaku sifat penyisipan faktor pada seminear-ring yang biasanya dapat ditemukan pada ring non-komutatif dan teori modul, serta hubungan antara seminear-ring dengan elemen nilpotent tak nol dengan sifat penyisipan faktor pada seminear-ring.
4. Mekonstruksi pembentukan ideal terkecil yang dapat dibangun oleh satu elemen dan sebuah subseminear-ring.
5. Merumuskan dan mengidentifikasi hubungan seminear-ring sederhana dengan ideal pada seminear-ring.

Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Seminear-ring adalah himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian di mana S terhadap operasi penjumlahan serta perkalian semigrup dan S terhadap kedua operasi memenuhi hukum distributif kanan. Berikut diberikan sifat-sifat dari seminear-ring.

1. Seminear-ring.

Elemen nol pada seminear-ring disebut dengan elemen absorptif dan diberikan melalui definisi berikut.

Definisi 1.1. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$. *Seminear-ring* S *dikatakan memiliki elemen absorptif* 0 *apabila untuk setiap* $a \in S$ *memenuhi* $0+a=a+0=a$ dan $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

Oleh karena sifat distributif pada seminear-ring $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkaliannya berlaku dua sisi yaitu sifat distributif kiri dan kanan. Sementara berdasarkan definisi seminear-ring diperoleh bahwa seminear-ring $(S,+,\cdot)$ cukup memenuhi salah satu sifat distributifnya, yaitu sifat distributif kanan. Hal ini memotivasi munculnya definisi seminear-ring distributif.

Definisi 1.2. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$. *Elemen* $a \in S$ *disebut elemen distributif apabila untuk setiap* $x,y \in S$ *berlaku* $a(x+y)=ax+ay$.

Seminear-ring S dikatakan distributif apabila S memuat semua elemen distributif. Kemudian seperti halnya pada semiring dan near-ring yang memiliki definisi elemen nilpoten, begitu juga pada seminear-ring.

Definisi 1.3. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$. *Elemen* $a \in S$ *disebut elemen nilpoten apabila terdapat bilangan bulat positif* k *sedemikian sehingga* $a^k=0$.

Definisi 1.4. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. *Elemen* $a \in S$ *disebut elemen idempoten apabila* $a^2=a$.

Definisi 1.5. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$. *Seminear-ring* S *dikatakan memiliki sifat peyisipan faktor (IFP) apabila untuk setiap* $a,b \in S$, $ab=0$ *berakibat* $axb=0$, *untuk setiap* $x \in S$.

Lebih lanjut diberikan definisi dari seminear-ring S yang dikatakan $(*,IFP)$.

Definisi 1.6. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$. *Seminear-ring* S *dikatakan* $(*,IFP)$ *apabila seminear-ring* S *memiliki IFP dan untuk setiap* $a,b \in R$, $ab=0$ *maka* $ba=0$.

Selanjutnya, seperti pada semiring yang memiliki subsemiring dan ideal pada semiring, subseminear-ring dan ideal pada seminear-ring didefinisikan dengan cara yang sama.

Definisi 1.7. (Perumal, Arulprakasam, & Radhakrishnan, 2018) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$, $K \subseteq S$ *dan* $K \neq \emptyset$. *Himpunan* K *yang dikenakan operasi penjumlahan dan perkalian seperti pada* S *disebut subseminear-ring apabila* K *terhadap operasi penjumlahan dan perkaliannya merupakan seminear-ring.*

PROXIMAL
JURNAL PENELITIAN MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

Definisi 1.8. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$ *dan* $I \subseteq S$. **Himpunan** *tak kosong* I *disebut ideal kiri (kanan) pada seminear-ring* S *apabila untuk setiap* $x, y \in I, x + y \in I$ *serta untuk setiap* $x \in I$ *dan* $a \in R$, $ax \in I$ $(xa \in I)$.

Ideal I dikatakan ideal pada seminear-ring S apabila I ideal kanan sekaligus ideal kiri. Selanjutnya, seperti halnya ideal prima pada semiring, ideal prima pada seminear-ring didefinisikan dengan cara yang sama. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 1.9. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$ *dan I ideal. Ideal I disebut ideal prima apabila untuk setiap* $A, B \subseteq S$ *ideal,* $AB \subseteq I$ *berakibat* $A \subseteq I$ *atau* $B \subseteq I$.

Definisi 1.10. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$ *dan I ideal. Ideal I disebut ideal semi prima apabila untuk setiap* $A \subseteq S$ *ideal,* $A^2 \subseteq I$ *berakibat* $A \subseteq I$.

Selanjutnya, jika I ideal prima di S maka I ideal semiprima di S.

Definisi 1.11. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$ *dan I ideal. Ideal I disebut ideal semi prima lengkap apabila untuk setiap* $x \in S$, $x^2 \in I$ *berakibat* $x \in I$.

Definisi 1.12. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$ *dan I ideal. Ideal I disebut ideal prima lengkap apabila untuk setiap* $x, y \in S$, $x \in I$ *berakibat* $x \in I$ *atau* $y \in I$.

Lebih lanjut, jika I ideal prima lengkap di S maka I ideal semiprima lengkap di S. Jika I ideal semiprima lengkap di S maka I ideal semiprima di S. Kemudian, dengan I ideal prima lengkap di S maka I ideal prima di S.

Definisi 1.13. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$ *dan I ideal. Ideal I disebut ideal prima kuat apabila untuk setiap* $A, B \subseteq S$ *ideal kiri,* $AB \subseteq I$ *berakibat* $A \subseteq I$ *atau* $B \subseteq I$.

Definisi 1.14. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Seminear-ring S disebut seminear-ring prima apabila* $\{0\}$ *adalah ideal prima di S.*

Definisi 1.15. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Seminear-ring S disebut seminear-ring semiprima apabila* $\{0\}$ *adalah ideal semiprima di S.*

Definisi 1.16. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Seminear-ring S disebut seminear-ring prima kuat apabila* $\{0\}$ *adalah ideal prima kuat di* S.

Diketahui bahwa elemen nilpoten pada seminear-ring S yaitu $a^n = 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, sehingga ideal I disebut nil apabila setiap elemen di I elemen nilpoten. Lebih lanjut, seminear-ring S disebut nil seminear-ring apabila setiap elemen di S merupakan elemen nilpoten.

Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

Definisi 1.17. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$, $A \subseteq S$ *dan* $A \neq \emptyset$. *Annihilator kiri dari* A *di* S *adalah* $\ell(A) = \{x \in S | xa = 0, \forall a \in A\}$ *dan annihilator kanan dari* A *di* S *adalah* $r(A) = \{x \in S | ax = 0, \forall a \in A\}$.

Apabila $A = \{a\}$ maka $\ell(A)$ dituliskan dengan $\ell(a)$ dan apabila $A = \{a\}$ maka $r(A)$ dituliskan dengan $r(a)$.

Definisi 1.18. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$, $A, B \subseteq S$ *dan* $A, B \neq \emptyset$. *Himpunan* $(A{:}\,B)$ *didefinisikan sebagai* $\{x \in S | xB \subseteq A\}$.

Definisi 1.19. (Hussain, Tahir, Abdullah, & Sadiq, 2016) *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$. *Seminear-ring* S *disebut seminear-ring sederhana kiri (kanan) apabila satu-satunya ideal kiri (kanan) tak nol di* S *adalah* S *itu sendiri.*

Selanjutnya, S disebut seminear-ring sederhana apabila S tidak memiliki ideal non-trivial.

2. Annihilator Seminear-ring sebagai Ideal di S.

Proposisi 2.1. *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$. *Jika* $A \subseteq S$ *dan* $A \neq \emptyset$, *maka* $\ell(A)$ *adalah ideal kiri dari* S.

Bukti:
Akan ditunjukkan $\ell(A)$ ideal kiri di S. Diambil sebarang $a \in A$ dan $x, y \in \ell(A)$. Oleh karena $\ell(A) \subseteq S$ dan S seminear-ring maka $(x+y)a = xa + ya = 0 + 0 = 0$. Hal ini berakibat $x + y \in \ell(A)$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in A$, $s \in S$ dan $x \in \ell(A)$. Oleh karena $\ell(A) \subseteq S$ dan S seminear-ring maka $(sx)a = s(xa) = s(0) = 0$. Akibatnya $sx \in \ell(A)$, dengan demikian $\ell(A)$ adalah ideal kiri di S. ■

Selain annihilator kiri yang merupakan ideal kiri pada seminear-ring S, annihilator kanan juga merupakan ideal kanan pada seminear-ring distributif S. Namun, annihilator kanan belum tentu ideal kanan pada seminear-ring S.

Proposisi 2.2. *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$, $A \subseteq S$ *dan* $A \neq \emptyset$. *Jika* S *seminear-ring distributif, maka* $r(A)$ *adalah ideal kanan dari* S.

Bukti:
Akan ditunjukkan $r(A)$ ideal kanan di S. Diambil sebarang $a \in A$ dan $x, y \in r(A)$, artinya $ax = 0$ dan $ay = 0$. Oleh karena $r(A) \subseteq S$ dan S seminear-ring distributif maka $a(x+y) = ax + ay = 0 + 0 = 0$. Hal ini berakibat $x + y \in r(A)$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in A$, $s \in S$ dan $x \in r(A)$ artinya $ax = 0$. Oleh karena $r(A) \subseteq S$ dan S seminear-ring distributif maka $a(xs) = (ax)s = (0)s = 0$. Akibatnya $xs \in r(A)$, dengan demikian $r(A)$ adalah ideal kanan di seminear-ring distributif S. ■

Selanjutnya diberikan syarat perlu dan cukup suatu himpunan I merupakan ideal kiri atau ideal kanan di S.

Proposisi 2.3. *Diberikan seminear-ring* $(S,+,\cdot)$ *dan* I *subsemigrup* S. *Himpunan* I *disebut ideal kiri (kanan) di* S *jika dan hanya jika* $SI \subseteq I (IS \subseteq I)$.

Bukti:
Akan ditunjukkan $SI \subseteq I (IS \subseteq I)$. Diambil sebarang $si \in SI (is \in IS)$, dengan $s \in S$ dan $i \in I$. Oleh karena I ideal kiri (kanan) di S, sehingga $si(is) \in I$. Dengan demikian terbukti bahwa

$SI \subseteq I(IS \subseteq I)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan I ideal kiri (kanan) di S. Diambil sebarang $x, y \in I$ dan $s \in S$, karena I subsemigrup di S maka $x + y \in I$ dan karena $SI \subseteq I(IS \subseteq I)$ diperoleh $sx(xs) \in I$. Dengan demikian terbukti bahwa I ideal kiri (kanan) di S. ■

Apabila seminear-ring S memiliki sifat IFP, akan dianalisis perilaku annihilator kiri dari A atau $\ell(A)$ di S. Lebih khusus, untuk setiap $s \in S$ annihilator kiri dari S juga merupakan ideal di S.

Teorema 2.4. *Diberikan seminear-ring $(S, +, \cdot)$. Pernyataan berikut ekuivalen:*
a. *Seminear-ring $\boldsymbol{S}$ memiliki sifat IFP.*
b. *Untuk setiap $\boldsymbol{s \in S}$, $\boldsymbol{\ell(S)}$ ideal di $\boldsymbol{S}$.*
c. *Untuk setiap himpunan $\boldsymbol{A \subseteq S}$, $\boldsymbol{\ell(A)}$ ideal di $\boldsymbol{S}$.*

Bukti:
$(a \to b)$ Akan ditunjukkan untuk setiap $s \in S$, $\ell(S)$ ideal di S. Berdasarkan Proposisi 2.1. diperoleh bahwa untuk sebarang seminear-ring S, $\ell(S)$ ideal kiri di S. Tinggal ditunjukkan bahwa $\ell(S)$ ideal kanan di S. Diambil sebarang $p \in S$ dan $x, y \in \ell(S)$, artinya untuk setiap $s \in S$, $xs = 0$ dan $ys = 0$. Perhatikan bahwa $(x + y)s = xs + ys = 0 + 0 = 0$. Hal ini berakibat $x + y \in \ell(S)$. Selanjutnya, karena S memiliki sifat IFP dan untuk setiap $x \in \ell(S)$, $xs = 0$ maka $(xp)s = 0$ berakibat $xp \in \ell(S)$. Dengan demikian diperoleh bahwa $\ell(S)$ ideal kanan di S. Oleh karena $\ell(S)$ juga merupakan ideal kiri di S. Jadi terbukti bahwa $\ell(S)$ ideal di S.
$(b \to c)$ Akan ditunjukkan untuk setiap himpunan $A \subseteq S$, $\ell(A)$ ideal di S. Berdasarkan Proposisi 2.1 diperoleh bahwa untuk sebarang seminear-ring S, $\ell(A)$ ideal kiri di S. Tinggal ditunjukkan bahwa $\ell(A)$ ideal kanan di S. Diambil sebarang $p \in S$ dan $x, y \in \ell(A)$, artinya untuk setiap $a \in A$, $xa = 0$ dan $ya = 0$. Perhatikan bahwa $(x + y)a = xa + ya = 0 + 0 = 0$. Hal ini berakibat $x + y \in \ell(A)$. Selanjutnya, karena S memiliki sifat IFP dan untuk setiap $x \in \ell(A)$, $xa = 0$ maka $(xp)a = 0$ berakibat $xp \in \ell(A)$. Dengan demikian diperoleh bahwa $\ell(A)$ ideal kanan di S. Oleh karena $\ell(A)$ juga merupakan ideal kiri di S. Jadi terbukti bahwa $\ell(A)$ ideal di S.
$(c \to a)$ Akan ditunjukkan seminear-ring S memiliki sifat IFP. Diambil sebarang $a, b \in S$ dengan $ab = 0$, artinya $a \in \ell(b)$. Berdasarkan (iii) diperoleh bahwa untuk setiap $b \in S$, $\ell(b)$ ideal di S. Hal ini berakibat untuk setiap $s \in S$ berlaku $as \in \ell(b)$ yang artinya $(as)b = 0, \forall s \in S$. Dengan demikian seminear-ring S dapat dikatakan memiliki sifat IFP. ■

Selanjutnya, diberikan syarat cukup annihilator kiri dari A di S merupakan ideal pada S. Namun, ditunjukkan dahulu bahwa S merupakan seminear-ring yang memiliki $(*, IFP)$ apabila S merupakan seminear-ring tanpa elemen nilpoten tak nol.

Proposisi 2.5. *Diberikan seminear-ring $(S, +, \cdot)$. Jika seminear-ring S adalah seminear-ring tanpa elemen nilpoten tak nol, maka S memiliki $(*, IFP)$.*

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa S memiliki $(*, IFP)$. Diambil sebarang $x, y \in S$ dengan $xy = 0$, karena S seminear-ring maka $(yx)^2 = (yx)(yx) = y(xy)x = y0x = 0$. Oleh karena S merupakan seminear-ring tanpa elemen nilpoten yang tak nol, maka $yx = 0$. Selanjutnya untuk setiap $a \in S$ diperoleh $(xay)^2 = (xay)(xay) = xa(yx)ay = xa0ay = 0$. Dengan demikian diperoleh bahwa $xay = 0, \forall a \in S$. Dengan kata lain terbukti bahwa S memiliki $(*, IFP)$. ■

Proposisi 2.6. Diberikan *seminear-ring $(S, +, \cdot)$, $A \neq \emptyset$. Jika seminear-ring S adalah seminear-ring tanpa elemen nilpoten tak nol, maka $\ell(A)$ adalah ideal dari S, untuk setiap $A \subseteq S$.*

Bukti:

Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

Akan ditunjukkan bahwa $\ell(A)$ ideal dari S, untuk setiap $A \neq \emptyset \subseteq S$. Berdasarkan Preposisi 4.1. telah diperoleh bahwa untuk sebarang seminear-ring S, $\ell(A)$ ideal kiri di S dengan S seminear-ring tanpa elemen nilpoten tak nol. Tinggal ditunjukkan bahwa $\ell(A)$ ideal kanan di S seminear-ring tanpa elemen nilpoten tak nol. Diambil sebarang $s \in S$ dan $x, y \in \ell(A)$, artinya $xa = 0$ dan $ya = 0$, untuk setiap $a \in A$. Perhatikan bahwa $(x+y)a = xa + ya = 0 + 0 = 0$, berakibat $x + y \in \ell(A)$. Selanjutnya karena S seminear-ring tanpa elemen nilpoten tak nol, dengan $(ax)^2 = (ax)(ax) = a(xa)x = a0x = 0$ diperoleh $ax = 0$, sehingga $\big((xs)a\big)^2 = \big((xs)a\big)\big((xs)a\big) = (xsa)(xsa) = xs(ax)sa = xs0sa = 0$. Dengan demikian diperoleh $(xs)a = 0$ atau $xs \in \ell(A)$ atau $\ell(A)$ ideal kanan di S. Oleh karena $\ell(A)$ ideal kanan dan ideal kiri di S. Terbukti bahwa $\ell(A)$ ideal di seminear-ring tanpa elemen nilpoten tak nol S.■

3. Ideal $(A\colon B)$ pada Seminear-ring S.

Pada seminear-ring S telah didefinisikan himpunan $(A\colon B)$ dengan $A, B \subseteq S$. Selanjutnya, diberikan syarat cukup himpunan $(A\colon B)$ di S merupakan ideal kiri.

Proposisi 3.1. *Diberikan seminear-ring $(S, +, \cdot)$, $A \subseteq S$. Jika A ideal di S dan $B \subseteq S$, maka $(A\colon B)$ merupakan ideal kiri di S.*

Bukti:
Akan ditunjukkan $(A\colon B)$ merupakan ideal kiri di S. Diambil sebarang $s \in S$ dan $x, y \in (A\colon B)$ artinya $xB \subseteq A$ dan $yB \subseteq A$. Perhatikan bahwa $(x+y)B = xB + yB$. Oleh karena A ideal di S dan $xB \subseteq A$ serta $yB \subseteq A$, maka $(x+y)B \subseteq A$. Dengan kata lain $x + y \in (A\colon B)$. Selanjutnya, $(sx)B = s(xB)$ dengan alasan yang sama diperoleh bahwa $sx \in (A\colon B)$. Dengan demikian terbukti bahwa $(A\colon B)$ ideal kiri di S. ■
Lebih lanjut, untuk A dan A ideal di S, himpunan $(A\colon B)$ merupakan sebuah ideal di S.

Proposisi 3.2. *Diberikan seminear-ring $(S, +, \cdot)$, $A, B \subseteq S$. Jika A dan B ideal di S, maka $(A\colon B)$ merupakan ideal di S.*

Bukti:
Akan ditunjukkan $(A\colon B)$ merupakan ideal di S. Diambil sebarang $s \in S$ dan $x, y \in (A\colon B)$ artinya $xB \subseteq A$ dan $yB \subseteq A$. Perhatikan bahwa $(x+y)B = xB + yB$. Oleh karena A ideal di S dan $xB \subseteq A$ serta $yB \subseteq A$, maka $(x+y)B \subseteq A$. Dengan kata lain $x + y \in (A\colon B)$. Selanjutnya, $(sx)B = s(xB)$ karena A ideal di S dan $xB \subseteq A$ diperoleh bahwa $sxB \subseteq A$ sehingga $sx \in (A\colon B)$. Dilain pihak $(xs)B = x(sB)$, karena B ideal di S dan $sB \subseteq B$ serta $x(sB) \subseteq xB \subseteq A$. Hal ini berakibat $xsB \subseteq A$ sehingga $xs \in (A\colon B)$. Dengan demikian diperoleh bahwa $(A\colon B)$ ideal di S. ■
Apabila A diperkuat menjadi suatu ideal semiprima lengkap, akan diperoleh $(A\colon B)$ merupakan ideal pada S.

Proposisi 3.3. *Diberikan seminear-ring $(S, +, \cdot)$, $I \subseteq S$ ideal semiprima lengkap. Jika A sebarang subset di S, maka $(I\colon A)$ merupakan ideal di S.*

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa $(I\colon A)$ merupakan ideal di S dengan I adalah ideal semiprima lengkap dan $A \subseteq S$. Diambil sebarang $x, y \in (I\colon A)$ artinya $x \in xA \subseteq I$ dan $y \in yA \subseteq I$. Perhatikan bahwa $(x+y)A = xA + yA$, karena $xA, yA \subseteq I$ dan I ideal semiprima lengkap di S, maka $(x+y)A \subseteq I$. Hal ini berakibat $x + y \in (I\colon A)$. Selanjutnya untuk sebarang $x \in (I\colon A)$ artinya $x = xa \in xA \subseteq I$ dan karena I ideal maka, $(ax)^2 = (ax)(ax) = a(xa)x \subseteq SIS \subseteq SI \subseteq I$. Oleh karena I ideal semiprima lengkap maka $ax \in I$. Sehingga untuk sebarang $s \in S$ diperoleh $sxa \in sI \subseteq I$. Dengan demikian $sx \in I$ atau I merupakan ideal kiri di S. Selanjutnya untuk

setiap $r \in S$ berlaku $(xra)^2 = (xra)(xra) = xr(ax)ra \subseteq SIS \subseteq SI \subseteq S$. Sehingga diperoleh bahwa $xr \in I$ atau I merupakan ideal kanan di S. Jadi, terbukti bahwa I merupakan ideal di S. ■

4. Seminear-ring Sederhana.

Selanjutnya, akan diketahui pembentukan seminear-ring sederhana melalui Sa dan aS sebagai ideal kiri dan ideal kanan di S, dengan definisi untuk setiap $a \in S, aS(Sa)$ dinotasikan sebagai himpunan semua jumlahan berhingga di mana $\Sigma ax_k(\Sigma x_k a)$. Oleh karena S memenuhi hukum distributif kanan, sehingga $Sa = \{xa | x \in S\}$.

Proposisi 4.1. Diberikan *seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Jika untuk setiap* $a \in S$, *maka*

i. $\boldsymbol{Sa}$ *ideal kiri di* $\boldsymbol{S}$.

ii. $\boldsymbol{aS}$ *ideal kanan di* $\boldsymbol{S}$.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $\mathbf{Sa}$ ideal kiri di $\mathbf{S}$. Diambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Sa}$, artinya $\mathbf{x} = \mathbf{sa}$ dan $\mathbf{y} = \mathbf{ra}$ dengan $\mathbf{s}, \mathbf{r} \in \mathbf{S}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{sa} + \mathbf{ra} = (\mathbf{s} + \mathbf{r})\mathbf{a}$. Oleh karena $\mathbf{s}, \mathbf{r} \in \mathbf{S}$ dan $\mathbf{S}$ seminear-ring, maka $\mathbf{s} + \mathbf{r} \in \mathbf{S}$. Akibatnya $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{Sa}$. Selanjutnya untuk setiap $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$ berlaku $\mathbf{px} = \mathbf{p}(\mathbf{sa}) = (\mathbf{ps})\mathbf{a}$. Oleh karena $\mathbf{ps} \in \mathbf{S}$, akibatnya $\mathbf{px} \in \mathbf{Sa}$. Dengan demikian terbukti bahwa $\mathbf{Sa}$ ideal kiri di $\mathbf{S}$.

ii. Akan ditunjukkan $\mathbf{aS}$ ideal kanan di $\mathbf{S}$. Diambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{aS}$, artinya $\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma as_i}$ dan $\mathbf{y} = \mathbf{\Sigma ar_i}$ dengan $\mathbf{s_i}, \mathbf{r_i} \in \mathbf{S}, \forall \mathbf{i}$. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Sigma as_i} + \boldsymbol{\Sigma ar_i} = \boldsymbol{\Sigma(as_i + ar_i)} = \boldsymbol{\Sigma a(s_i + r_i)} = \boldsymbol{a\Sigma(s_i + r_i)}$. Oleh karena $\boldsymbol{s_i}, \boldsymbol{r_i} \in \boldsymbol{S}$ dan $\boldsymbol{S}$ seminear-ring, maka $\boldsymbol{s_i} + \boldsymbol{r_i} \in \boldsymbol{S}, \forall \boldsymbol{i}$, lebih lanjut $\boldsymbol{\Sigma(s_i + r_i)} \in \boldsymbol{S}$. Akibatnya $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{aS}$. Selanjutnya untuk setiap $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{S}$ berlaku $\boldsymbol{xp} = (\boldsymbol{\Sigma as_i})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\Sigma as_i p} = \boldsymbol{a\Sigma s_i p}$. Oleh karena $\boldsymbol{s_i p} \in \boldsymbol{S}, \forall \boldsymbol{i}$, dan $\boldsymbol{\Sigma s_i p} \in \boldsymbol{S}$. Akibatnya $\boldsymbol{xp} \in \boldsymbol{aS}$. Dengan demikian terbukti bahwa $\boldsymbol{aS}$ ideal kanan di $\boldsymbol{S}$. ■

Selanjutnya, akan diidentifikasi Sa^2 dan a^2S sebagai ideal kiri dan kanan berturut-turut di S. Definisi $Sa^2 = \{xa^2 | x \in S\}$ dan $a^2S = \{\Sigma a^2x | x \in S\}$.

Proposisi 4.2. *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Jika untuk setiap* $a \in S$, *maka:*

i. $\boldsymbol{Sa^2}$ *ideal kiri di* $\boldsymbol{S}$.

ii. $\boldsymbol{a^2S}$ *ideal kanan di* $\boldsymbol{S}$.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{Sa^2}$ ideal kiri di $\boldsymbol{S}$. Diambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Sa^2}$, artinya $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{sa^2}$ dan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ra^2}$ dengan $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{S}$. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{sa^2} + \boldsymbol{ra^2} = (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r})\boldsymbol{a^2}$. Oleh karena $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{S}$ dan $\boldsymbol{S}$ seminear-ring, maka $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{S}$. Akibatnya $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Sa^2}$. Selanjutnya untuk setiap $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{S}$ berlaku $\boldsymbol{px} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{sa^2}) = (\boldsymbol{ps})\boldsymbol{a^2}$. Oleh karena $\boldsymbol{ps} \in \boldsymbol{S}$, akibatnya $\boldsymbol{px} \in \boldsymbol{Sa}$. Dengan demikian terbukti bahwa $\boldsymbol{Sa}$ ideal kiri di $\boldsymbol{S}$.

ii. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{a^2S}$ ideal kanan di $\boldsymbol{S}$. Diambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{a^2S}$, artinya $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Sigma a^2 s_i}$ dan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Sigma a^2 r_i}$ dengan $\boldsymbol{s_i}, \boldsymbol{r_i} \in \boldsymbol{S}, \forall \boldsymbol{i}$. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Sigma a^2 s_i} + \boldsymbol{\Sigma a^2 r_i} = \boldsymbol{\Sigma(a^2 s_i + a^2 r_i)} = \boldsymbol{\Sigma a^2(s_i + r_i)} = \boldsymbol{a^2\Sigma(s_i + r_i)}$. Oleh karena $\boldsymbol{s_i}, \boldsymbol{r_i} \in \boldsymbol{S}$ dan $\boldsymbol{S}$ seminear-ring, maka $\boldsymbol{s_i} + \boldsymbol{r_i} \in \boldsymbol{S}, \forall \boldsymbol{i}$, lebih lanjut $\boldsymbol{\Sigma(s_i + r_i)} \in \boldsymbol{S}$. Akibatnya $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{a^2S}$. Selanjutnya untuk setiap $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{S}$ berlaku $\boldsymbol{xp} = (\boldsymbol{\Sigma a^2 s_i})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\Sigma a^2 s_i p} = \boldsymbol{a^2 \Sigma s_i p}$.Oleh karena $\boldsymbol{s_i p} \in \boldsymbol{S}, \forall \boldsymbol{i}$, dan $\boldsymbol{\Sigma s_i p} \in \boldsymbol{S}$. Akibatnya $\boldsymbol{xp} \in \boldsymbol{a^2S}$. Dengan demikian terbukti bahwa $\boldsymbol{a^2S}$ ideal kanan di $\boldsymbol{S}$. ■

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa aS dan Sa merupakan satu-satunya ideal kanan dan kiri di seminear-ring S, sehingga S membentuk seminear-ring sederhana kiri dan kanan.

Proposisi 4.3. *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Jika untuk setiap* $a \in S$, $Sa = S$ *maka* S *adalah seminear-ring sederhana kiri.*

Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN 26158132 (cetak)
ISSN 26157667 (online)

Bukti:
Akan ditunjukkan S seminear-ring sederhana kiri. Andaikan ada ideal kiri yang lain yaitu I dengan $S \neq I$, maka untuk setiap $i \in I \subseteq S$ diperoleh $S = Si \subseteq SI \subseteq I$. Oleh karena $I \subseteq S$ dan $S \subseteq I$, didapat $S = I$. Kontradiksi dari yang diketahui bahwa $S \neq I$, sehingga pengandaian salah haruslah tidak ada ideal kiri yang lain selain $S = Sa$. ■

Proposisi 4.4. *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Jika untuk setiap* $a \in S$, $aS = S$ *jika dan hanya jika* S *adalah seminear-ring sederhana kanan.*

Bukti:
Akan ditunjukkan S seminear-ring sederhana kanan. Andaikan ada ideal kanan yang lain yaitu I dengan $S \neq I$, maka untuk setiap $i \in I \subseteq S$ diperoleh $S = iS \subseteq IS \subseteq I$. Oleh karena $I \subseteq S$ dan $S \subseteq I$, didapat $S = I$. Kontradiksi dari yang diketahui bahwa $S \neq I$, sehingga pengandaian salah haruslah tidak ada ideal kanan yang lain selain $S = aS$. Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa $S = aS$. Berdasarkan Proposisi 4.36. diketahui bahwa aS merupakan ideal kanan di S. Karena S adalah seminear-ring sederhana kanan, maka diperoleh bahwa $S = aS$. ■
Lebih lanjut, akan diidentifikasi seminear-ring sederhana.

Proposisi 4.4. *Diberikan seminear-ring* $(S, +, \cdot)$. *Jika untuk setiap* $a \in S$, $(Sa)S = S$ *maka* S **adalah** *seminear-ring sederhana.*

Bukti:
Akan ditunjukkan S seminear-ring sederhana. Andaikan ada ideal yang lain yaitu I dengan $S \neq I$, maka untuk setiap $i \in I \subseteq S$ diperoleh $S = SiS \subseteq SIS \subseteq IS \subseteq I$. Oleh karena $I \subseteq S$ dan $S \subseteq I$, didapat $S = I$. Kontradiksi dari yang diketahui bahwa $S \neq I$, sehingga pengandaian salah haruslah tidak ada ideal yang lain selain $S = SaS$. ■

D. Kesimpulan

Annihilator kiri dari seminear-ring S merupakan ideal kiri di S, tetapi belum tentu berlaku sebaliknya. Dilain pihak, Annihilator kanan dari seminear-ring distributif S juga merupakan ideal kanan di S. Syarat perlu dan syarat cukup annihilator kiri disebut ideal di seminear-ring S, apabila S merupakan seminear-ring yang memiliki sifat penyisipan faktor (IFP). Selain itu, apabila S merupakan seminear-ring dengan elemen nilpotent tak nol dan memiliki sifat $(*, IFP)$ diperoleh syarat perlu dan cukup untuk annihilator kiri membentuk ideal pada seminear-ring S.

Himpunan $(A: B)$ juga merupakan ideal pada seminear-ring, jika A ideal pada seminear-ring S, maka $(A: B)$ hanya merupakan ideal kiri pada S. Namun, jika A ideal serta B ideal diperoleh $(A: B)$ ideal di S. Selanjutnya, apabila A merupakan ideal semiprima lengkap diperoleh bahwa $(A: B)$ ideal di S.

Himpunan Sa dan aS yang ada pada semiring komutatif merupakan ideal. Namun, dalam seminear-ring diperoleh bahwa Sa merupakan ideal kiri di S dan aS merupakan ideal kanan di S. Hal ini dipengaruhi oleh tidak berlakunya sifat komutatif terhadap operasi perkalian pada seminear-ring S. Namun, hasil yang dapat diperoleh dari Sa dan aS adalah keduanya dapat mengkonstruksi seminear-ring sederhana kiri dan seminear-ring sederhana kanan. Lebih lanjut, apabila $(Sa)S = S$ maka S merupakan seminear-ring sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

Atani, R. E. (2013). Generalizations of Prime Ideals of Semirings. Azerbaijan Journal of Mathematics,3(1) 76-83. Retrieved from: https://www.azjm.org.

Ayaragarnchanakul, J., & Mitchell, S. (1994). Division Seminear-rings. *Kyungpook Mathematical Journal*, 34(1)67-72. Retrieved From: https://www.koreascience.or.kr

Baek, S. H., & etc. (2014). Insertion-Of-Ideal-Factors-Property. *East Asian Math Journal*, 30(5) 617-623. Retrieved From: https://doi.org/10.7858/eamj.2014.041

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra third edition.* United States of America: John Wiley and Sons, Inc.

Golan, J. S. (2013). *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications.* Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.

Hussain, F., Tahir, M., Abdullah, S., & Sadiq, N. (2016). Quotient Seminear-Rings. *Indian Journal of Science and Technology*, 9(38)1-7. doi:10.17485/ijst/2016/v9i38/89115

Koppula, K., Srinivas, K. B., & Prasad, K. S. (2020). On Prime Strong Ideals of a Seminearring. *Matematicki Vesnik*, 72(3)243-256. Retrieved From: https://manipal.pure.elsevier.com/en/publications/on-prime-strong-ideals-of-a-seminearring

Kornthorng, N., & Iampan, A. (2012). A Note on Right Full k-Ideals of Seminearrings. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 4(3)255-261. Retrieved From: https://www.research.science.up.ac.th

Malik, D., Mordeson, J. S., & Sen, M. (1997). *Fundamentals of Abstract Algebra.* United States of America: The Mc Graw-Hill Companies, Inc.

Perumal, R., Arulprakasam, R., & Radhakrishnan, M. (2018). A note on Ideals in Seminear-Rings. *National Conference on Mathematical Techniques and Its Applications*, 1000(1)1-6. doi: 10.1088/1742-6596/1000/1/012150

Perumal, R., & Chinnaraj, P. (2015). Medial Left Bipotent Seminear-Rings. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 139(1)451-457. Retrieved From: https://doi.org/10.1007/978-81-322-2452-5_31

Pilz, G. (1983). *Near-Rings.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Senthil, S., & Perumal, R. (2020). Minimal Prime Ideals in Seminearrings. *Journal of Physics: Conference Series*, 1-4. doi:10.1088/1742-6596/1850/1/012100

Shabir, M., & Ahmed, I. (2007). Weakly Regular Seminearrings. *International Electronic Journal of Algebra*, 2(2)114-126. Retrieved From: https://dergipark.org.tr/en/pub/ieja/issue/25209/266403

Van, H. W., & Van, R. B. (1967). Fundamental Notions In The Theory Of Seminearrings. *Compositio Mathematica*, 18(1)65-78. Retrieved from: http://www.numdam.org/item?id=CM_1967_18_1-2_65_0