Pedagogy p-ISSN: 2502-3802
Volume 10 Nomor 4 e-ISSN: 2502-3799

KENDALA DALAM PEMBUKTIAN LIMIT FUNGSI DI SATU TITIK

Sabri[1*], Bernard[2], Abdurahman Hamid[3]
Pendidikan Matematika[1,2,3], Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam [1,2,3], Universitas Negeri Makassar[1,2,3]
sabri@unm.ac.id[1*], bernard@unm.ac.id[2], abdurahman.hamid@unm.ac.id[3]

Abstrak

Kendala belajar adalah bagian struktural dari proses membangun pengetahuan matematika. Artikel ini mengkaji kendala belajar yang dialami mahasiswa ketika membuktikan limit menggunakan definisi formal epsilon–delta. Berdasarkan teori situasi didaktis (Brousseau, 2002), penelitian ini mengidentifikasi kendala belajar dalam konteks pembuktian $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Melalui tes tertulis dan analisis konten kualitatif, ditemukan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam menentukan batas δ yang sesuai, terutama karena pemahaman konseptual nilai mutlak yang belum memadai, apalagi ketika harus menangani ekspresi kebalikan yang memuat nilai mutlak. Temuan ini menunjukkan bagaimana kelemahan konseptual dasar terkait nilai mutlak dapat menjalar menjadi kendala dalam pembuktian limit formal.

Kata Kunci: Limit, Pembuktian Limit, Kendala Belajar, Nilai Mutlak.

A. Pendahuluan

Kalkulus, yang secara umum didefinisikan sebagai kajian tentang laju dan perubahan, merupakan alat yang sangat penting tidak hanya bagi matematikawan tetapi juga bagi orang-orang di berbagai bidang di mana pemodelan matematika dan solusi optimal menjadi bagian dari fokus mereka (Smart, 2016). Kalkulus berfungsi sebagai landasan penting untuk meraih kesuksesan di berbagai bidang, namun banyak mahasiswa yang mengikuti mata kuliah ini tanpa persiapan memadai, yang membatasi kemampuan mereka menyelesaikan kuliah dan mengejar karier (Bressoud, 2018; National Center for Education Statistics, 2018). Mata kuliah Kalkulus, bersama dengan matakuliah Analisis, cenderung mendominasi struktur kurikulum program sarjana pendidikan matematika dan matematika (Bressoud dkk., 2015). Selama lebih dari satu dekade, penelitian pembelajaran matematika di perguruan tinggi berkembang pesat (Melhuish, 2019); salah satunya adalah inisiatif Developing and Investigating a Rigorous Approach to

Conceptual Calculus (DIRACC) (Thompson dkk., 2018) yang bertujuan membantu mahasiswa membangun pemahaman konseptual yang kuat.

Kita tidak dapat menjawab pertanyaan yang terkait dengan perubahan jika kita tidak mengetahui apa perubahan itu dan bagaimana sesuatu berubah (Rohde dkk., 2012). Dalam memahami tentang perubahan ini, konsep fungsi menduduki posisi yang sangat mendasar, yang selanjutnya menjadikan fungsi sebagai konsep yang sangat mendasar dalam kalkulus (Stewart & Kokoska, 2023). Konsep ini merupakan inti dari sebagian besar mata kuliah di jurusan matematika (Bagley dkk., 2015). Dapat dinyatakan bahwa keseluruhan matematika dapat disatukan dengan konsep fungsi (Viirman, 2014). Kalkulus pada dasarnya adalah studi tentang turunan dan integral fungsi yang dibangun di atas konsep limit (Varberg dkk., 2014). Gagasan tentang limit adalah inti dari sejumlah konsep dalam kalkulus (Stewart & Kokoska, 2023).

Konsep matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan kita untuk mengkategorikan objek atau peristiwa apakah mereka adalah contoh atau bukan contoh dari ide abstrak tersebut (Bell, 1978). Sebuah konsep, sebagai hasil dari abstraksi (Simon, 2017; Simon dkk., 2016; Skemp, 2016), adalah konstruksi mental atau representasi dari kategori yang dengannya seseorang dapat membedakan contoh dari bukan contoh kategori tersebut (Klausmeier, 1992). Konsep matematika mewujud dalam bentuk definisi konsep.

Menurut Weigand (2014), untuk memahami konsep matematika, mahasiswa perlu memiliki pengetahuan tentang materi konsep, cakupan konsep, jaringan konsep, dan penerapan konsep. Terdapat dua komponen penting yang harus diperhatikan, yaitu, model mental dasar dan aspek konsep (Greefrath dkk., 2016). Model mental dasar memberi makna pada aspek berbasis konten dari konsep matematika, menyediakan hubungan dengan konteks yang bermakna. Aspek konsep matematika adalah subdomain dari konsep yang dapat digunakan untuk mengkarakterisasikannya berdasarkan konten matematika. Model mental dasar konsep matematika adalah interpretasi konseptual yang memberinya makna. Kilpatrick dkk. (2005) menetapkan perlunya mempelajari makna konsep

Model mental dasar dari konsep matematika juga dapat dikaji dalam dalam kerangka teoretis citra konsep–definisi konsep. Definisi konsep mengacu pada definisi formal atau eksplisit dari konsep tertentu, yang berupa kata-kata yang digunakan untuk membatasi konsep itu, sedangkan citra konsep mengacu pada semua citra mental individu mencakup struktur kognitif total yang terkait dan teridentifikasi dengan dengan konsep tersebut (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 2018). Citra konsep dapat berisi beberapa model mental dasar yang mengonseptualisasikan perspektif berbeda dan memberi makna terhadap berbagai aspek dari konsep tersebut; dengan demikian, definisi konsep merupakan realisasi spesifik dari suatu aspek konsep (Lee dkk., 2025)

Konsep limit dinyatakan dalam definisi formal limit—yang umum dikenal sebagai definisi epsilon–delta (ε–δ)—merupakan objek penting dalam matematika tingkat sarjana. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ didefinisikan bahwa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ (Varberg dkk., 2014; Hass dkk., 2020; Stewart & Kokoska, 2023; Anton dkk., 2022). Definisi dinyatakan dengan rangkaian kuantor, logika, pertidaksamaan, dan nilai mutlak. Pemahaman definisi ini diindikasikan di antaranya dengan kemampuan menjelaskan maksud dari definisi dengan bahasa sehari-hari, menggunakan definisi untuk membuktikan limit fungsi di satu titik atau suatu limit yang benar, memberikan ingkaran dari definisi, dan menggunakan ingkaran definisi untuk menunjukkan suatu limit yang tidak benar (Darwis, 1994). Definisi ini menandai transisi konseptual dari kalkulus yang bersifat prosedural menuju landasan konseptual analisis yang berbasis pada sistem deduktif-aksiomatik formal. Namun demikian, penelitian selama beberapa dekade menunjukkan bahwa mahasiswa jarang memperoleh pemahaman yang mendalam terhadap definisi ini, bahkan setelah mendapatkan pengajaran tradisional (misalnya, Alcock & Simpson, 2004; Cornu, 1991; Moore, 1994; dan Tall, 1992).

Definisi epsilon–delta dari limit merupakan salah satu topik yang paling menantang dalam kalkulus tingkat awal. Meskipun banyak mahasiswa dapat menghitung limit secara simbolik, pembuktian formal menggunakan definisi epsilon–delta menuntut tingkat abstraksi yang lebih tinggi. Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa mahasiswa sering gagal menghubungkan operasi aljabar dengan struktur logis yang mendasari definisi formal limit (Alcock & Simpson, 2004; Mamona-Downs, 2001, Przenioslo, 2004). Penelitian ini menelaah kendala belajar yang muncul ketika mahasiswa diminta membuktikan pernyataan:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$, dengan membuktikan kebenaran pernyataan:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analisis terhadap tulisan mahasiswa memperlihatkan bahwa kesulitan terbesar terletak pada proses menentukan batas untuk ekspresi: $|f(x) - L|$ jika diberikan $0 < |x - c| < \delta.$

Teori situasi didaktis yang dikemukakan oleh Brousseau (2002) menawarkan kerangka analitis yang menempatkan kesulitan belajar bukan sekadar sebagai kekurangan kognitif, melainkan sebagai kendala belajar yang alami. Kendala, berbeda dari kesalahan, bersifat produktif: kendala merupakan pemahaman awal yang sebelumnya mungkin fungsional, namun kemudian menjadi tidak memadai ketika mahasiswa menghadapi objek pembelajaran matematika yang lebih lanjut. Lebih jauh, Brousseau (2002) mengemukakan bahwa kesulitan bukan sekadar kesalahan, melainkan kendala terstruktur dan muncul dari penataan pengetahuan, lingkungan didaktis, serta perkembangan kognitif. Kendala belajar terdiri atas tiga, yaitu, kendala epistemologis, kendala didaktis, dan kendala ontogenetis.

Kendala epistemologis berasal dari sejarah dan struktur pengetahuan matematika itu sendiri (Brousseau, 2002). Kendala ini bukanlah hasil dari pembelajaran yang buruk; sebaliknya, hambatan epistemologis merefleksikan lompatan konseptual yang sejatinya dialami pembelajar ketika mereka beralih dari satu bentuk penalaran ke bentuk yang lebih lanjut. Ini sangat rentan terjadi, apalagi dalam mengkaji konsep-konsep ambang di Kalkulus, seperti, limit dengan definisi formal epsilon–delta (Breen & O’Shea, 2016). Menurut Brousseau (2002), pemahaman yang sebelumnya benar, tetapi tidak lagi memadai pada situasi baru, disebut kendala, bukan sekadar kesalahan.

Sebelum mempelajari definisi *ε–δ*, banyak mahasiswa beranggapan bahwa menentukan limit fungsi di satu titik cukup dengan mensubstitusikan nilai yang didekati ke dalam fungsi. Konsepsi awal ini awalnya fungsional, tetapi akhirnya berubah menjadi kendala ketika mahasiswa menemukan limit yang melibatkan ketakkontinuan atau definisi yang memerlukan ketelitian. Penalaran tentang limit secara intuitif sebagai prose dinamis nilai fungsi yang mendekati titik tertentu juga menjadi kurang fungsional ketika definisi epsilon–delta muncul yang memposisikan limit sebagai kendali numerik melalui batas-batas yang eksplisit.

Kendala yang kedua adalah kendala didaktis, yang berakar pada struktur pembelajaran di kelas, termasuk juga kontrak didaktis (Brousseau, 2002). Kendala ini muncul ketika mahasiswa memegang semacam norma tidak tertulis tentang apa yang diharapkan oleh dosen, dan seringkali melenceng dari karakteristik konseptual menjadi cenderung prosedural. Contohnya adalah pola pembuktian tertentu utuk limit yang berubah menjadi resep baku.

Kendala ketiga adalah yang bersifat ontogenesis. Kendala ini berkaitan dengan perkembangan pemahaman dan pengalaman belajar mahasiswa, yang sesungguhnya sangat erat terkait dengan kematangan kognitif dan struktur mental (skema) yang telah dimiliki (Brousseau, 2002). Dalam konteks pembuktian limit dengan definisi epsilon–delta, pemahaman mahasiswa tentang konsep dan sifat-sifat nilai mutlak, dan logika dasar adalah sesuatu yang mutlak. Dalam artikel ini akan dipaparkan temuan penelitian tentang kendala yang dialami oleh mahasiswa saat mereka membuktikan limit fungsi di satu titik dengan menggunakan definisi formal limit.

B. Metode Penelitian

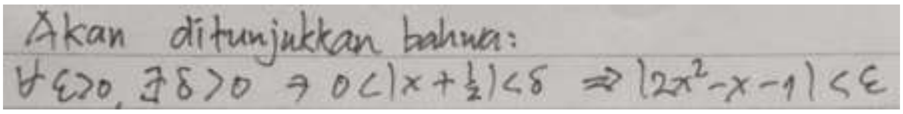
Penelitian ini adalah kajian eksplorasi kualitatif yang berbasis pada epistemologi konstruktivisme dan paradigma interpretif. Fokus eksplorasi sesungguhnya adalah pemahaman mahasiswa tentang definisi formal limit. Untuk artikel ini, fokus penelitian diarahkan pada kendala belajar yang dialami mahasiswa dalam membuktikan limit fungsi di satu dengan menggunakan definisi formal epsilon–delta. Penelitian dilaksanakan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar. Subjek penelitian adalah mahasiswa tahun pertama yang sementara memprogramkan mata kuliah Kalkulus Diferensial. Subjek dipilih secara purposif berdasarkan kepentingan dan/atau kebutuhan data penelitian. Pertimbangan yang digunakan dalam memilih subjek adalah hasil tes mahasiswa yang menunjukkan munculnya kendala belajar dalam pembuktian limit fungsi di satu titik.

Untuk pengumpulan data penelitian digunakan tes pemahaman konsep-konsep dasar kalkulus, khususnya kalkulus diferensial. Tes memuat butir-butir pertanyaan yang mencakup konsep-konsep dasar kalkulus tentang fungsi, pertidaksamaan, nilai mutlak, limit fungsi di satu titik, dan kekontinuan fungsi. Data yang dikumpulkan diolah dengan dengan menggunakan analisis isi (Kuckartz & Rädiker, 2023). Analisis isi adalah metode penelitian yang diterapkan pada materi tertulis atau visual yang bertujuan untuk mengidentifikasi karakteristik khusus dari materi atau makna yang disimpulkan dari materi tersebut (Ary dkk., 2019). Materi tertulis yang dimaksud dalam penelitian ini adalah hasil kerja atau jawaban mahasiswa untuk tes yang diberikan.

C. Hasil dan Pembahasan

Tes yang diberikan kepada mahasiswa adalah soal pembuktian limit fungsi di satu dengan menggunakan definisi formal limit – definisi epsilon–delta. Ini diberikan bersama dengan beberapa butir soal lainnya yang menyangkut konsep fungsi, pertidaksamaan, dan nilai mutlak, serta hubungan di antara mereka.

Hasil analisis data menunjukkan bahwa pembuktian limit menggunakan definisi epsilon–delta menunjukkan pola yang bertentangan antara dua jenis fungsi yang diberikan kepada mahasiswa. Tes pertama meminta mahasiswa membuktikan: $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(2x^2 - x\right) = 1$. Tugas pembuktian ini dijawab dengan menuliskan pernyataan yang akan ditunjukkan, berdasarkan definisi lengkap limit $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$ pada Gambar 1.

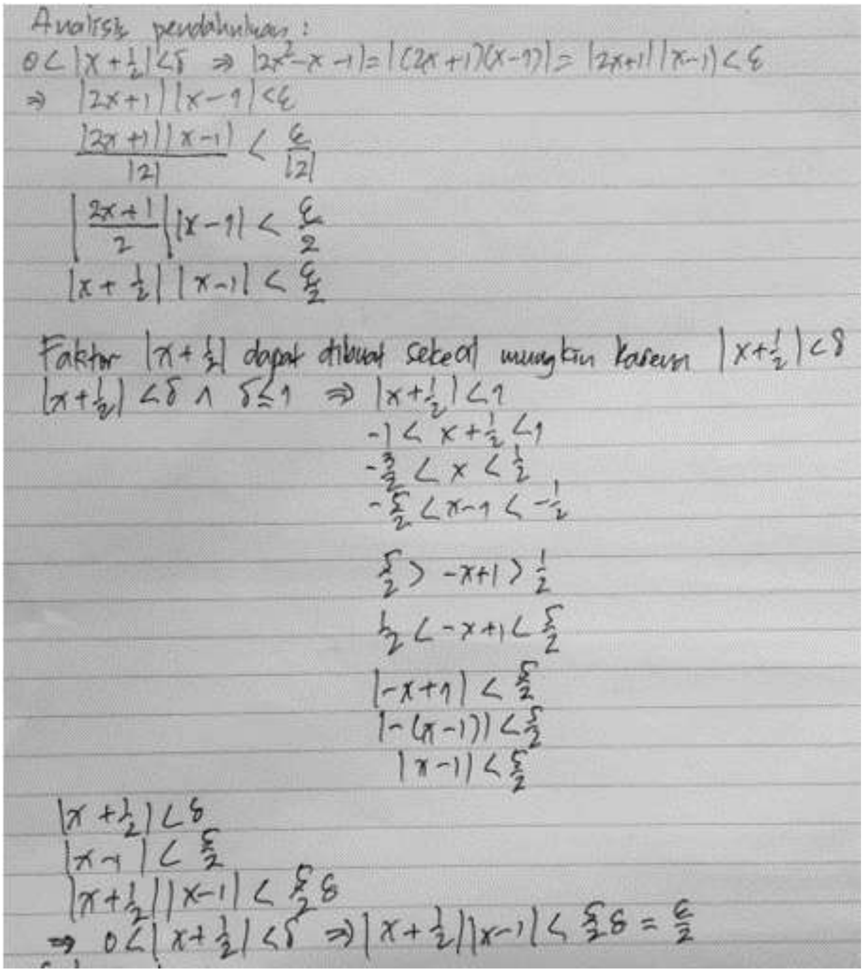

Akan ditunjukkan bahwa:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x + \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |2x^2 - x - 1| < \varepsilon$

Gambar 1. Pernyataan yang Akan Ditunjukkan untuk Pembuktian Limit

Bukti selanjutnya didahulu dengan analisis pendahuluan yang bertujuan untuk menentukan model hubungan yang mungkin antara δ dan ε, yang selanjutnya dipakai untuk memilih δ yang tepat (Gambar 2). Mahasiswa ini menentukan batas $|(2x^2 - x) - 1|$ setelah memfaktorkan nilai mutlak dari bentuk kuadrat tersebut:

$$\left|2x^2 - x - 1\right| = \left|(2x+1)(x-1)\right| = \left|2x+1\right|\left|x-1\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\left|2x+1\right|\left|x-1\right|}{\left|2\right|} < \frac{\varepsilon}{\left|2\right|} \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{2}\right|\left|x-1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|\left|x-1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

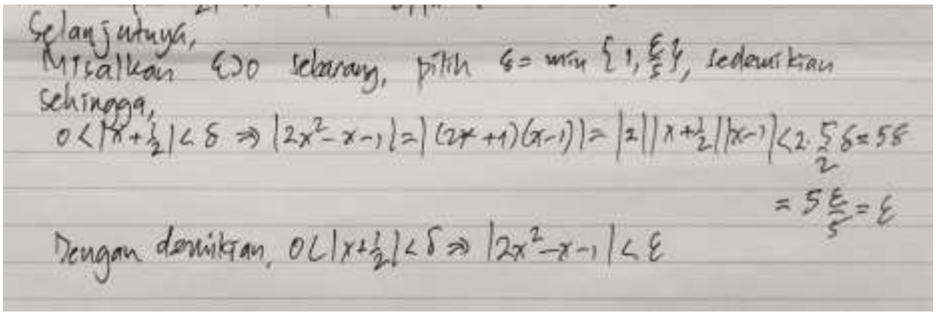


Gambar 2. Analisis Pendahuluan Bukti Limit

Langkah ini dilanjutkan dengan menentukan batas untuk faktor $\left|x-1\right|$ setelah menentukan batas maksimum δ , yaitu, $\delta \le 1$. Dengan $\left|x+\frac{1}{2}\right| < \delta \le 1$ dan serangkaian operasi berdasarkan sifat nilai mutlak diperoleh: $\left|x-1\right| < \frac{5}{2}$. Selanjutnya, $\left|x+\frac{1}{2}\right| < \delta$ dan $\left|x-1\right| < \frac{5}{2}$ $\Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|\left|x-1\right| < \frac{5}{2}\delta$. Tetapi, $\left|x+\frac{1}{2}\right|\left|x-1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, jadi diperoleh $\frac{5}{2}\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$, atau $5\delta \le \varepsilon$. Dari sini kemudian dipilih

$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$ untuk digunakan dalam bukti limit yang sebenarnya sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 3.

Pada soal pembuktian ini, ada mahasiswa yang berhasil memberikan pembuktian *ε*–*δ* yang benar sebagaimana yang ditampikan di atas. Fungsi polinomial seperti $f(x) = 2x^2 - x$ memiliki beberapa karakteristik yang memudahkan proses pembuktian, di antaranya, tidak ada bentuk akar maupun


Selanjutnya,
Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$, sedemikian sehingga,
$0 < |x + \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |2x^2 - x - 1| = |(2x+1)(x-1)| = |2||x+\frac{1}{2}||x-1| < 2 \cdot \frac{5}{2}\delta = 5\delta$
$= 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$
Dengan demikian, $0 < |x + \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |2x^2 - x - 1| < \varepsilon$

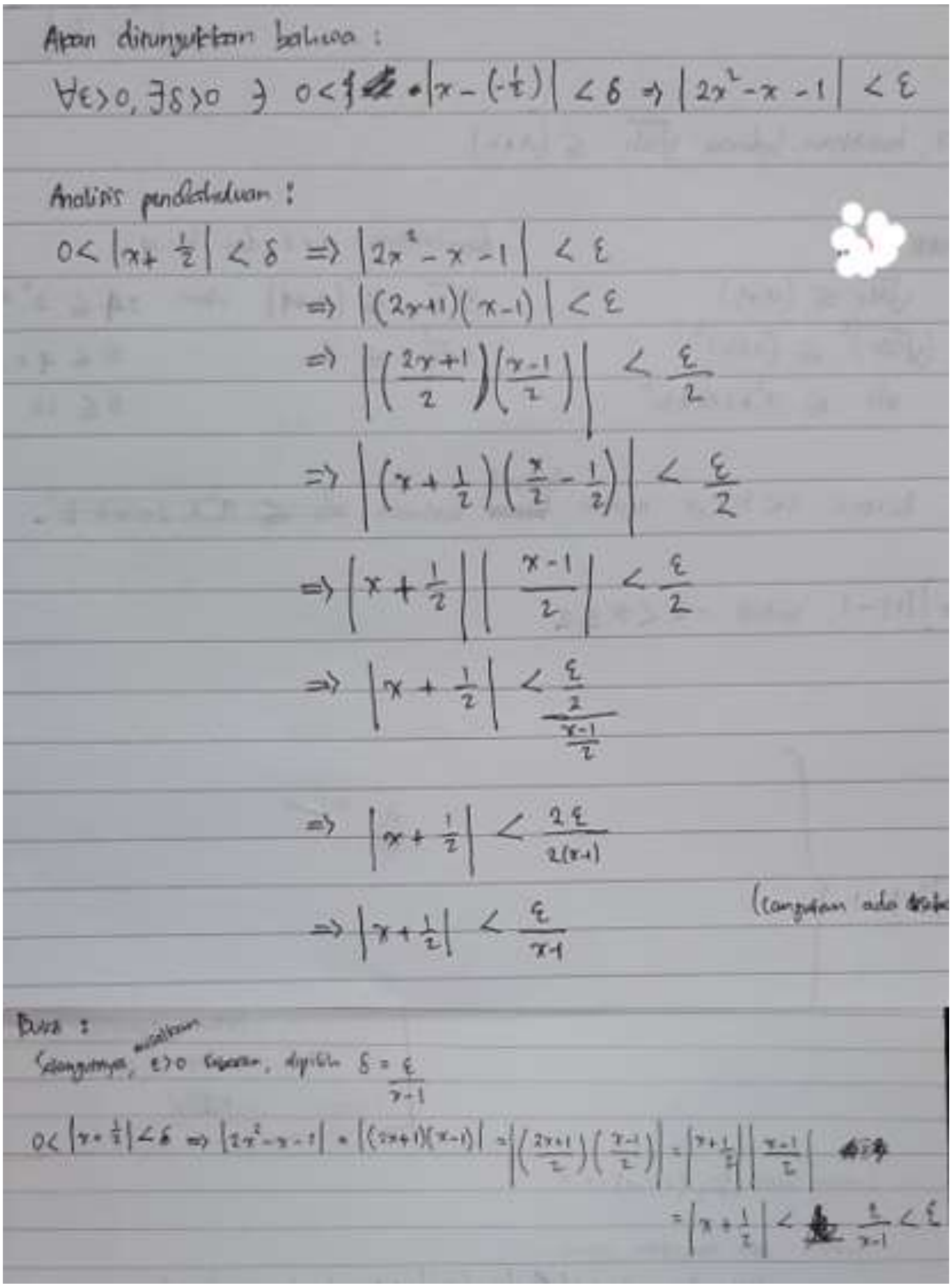
Gambar 3. Bukti Limit

bentuk kebalikan**, s**ehingga manipulasi nilai mutlak relatif sederhana; nilai mutlak untuk fungsi polinomial dapat ditangani dengan prosedur aljabar biasa, misalnya, memfaktorkan $\left|2x^2 - x - 1\right|$; dan domain fungsi (*R*) menjadikan relasi *δ* dan *ε* lebih mudah ditentukan. Dengan demikian, mahasiswa yang sudah memahami pola dasar pembuktian *ε*–*δ* dapat mengadaptasikan pola tersebut pada fungsi polinomial tanpa perubahan konseptual besar.

Dengan karakteristik fungsi polinomial—fungsi kuadrat di atas, sebenarnya, masih ada juga mahasiswa yang belum bisa menunjukkan bukti yang dimaksud. Mahasiswa ini tampaknya terjebak dengan cara pembuktian limit yang melibatkan fungsi linear, di mana *δ* dari *ε* memiliki relasi sederhana dalam bentuk $\delta = K\varepsilon$, dengan *K* adalah konstanta real. Jawaban mahasiswa ditampilkan pada Gambar 4.

Pada pembuktian ini, mahasiswa mengalami kendala dari awal analisis pendahuluan dengan membagi kedua ruas pertidaksamaan dengan bilangan yang berbeda: $\left|2x^2 - x - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$ Selanjutnya, kendala lainnya muncul karena memperlakukan salah satu faktor linear di ruas kiri sebagai konstanta real, sehingga menghasilkan:

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|\left|\frac{x-1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\left|\frac{x-1}{2}\right|}=\frac{\varepsilon}{x-1}.$$



Akan ditunjukkan bahwa :

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \ni 0<\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\delta \Rightarrow \left|2x^2-x-1\right|<\varepsilon$

Analisis pendahuluan :

$0<\left|x+\frac{1}{2}\right|<\delta \Rightarrow \left|2x^2-x-1\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \left|(2x+1)(x-1)\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \left|\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left|\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|\left|\frac{x-1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{x-1}{2}}$

$\Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{2\varepsilon}{2(x-1)}$

$\Rightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{x-1}$

Bukti :

Sembarang (misalkan) $\varepsilon>0$ diberikan, dipilih $\delta=\frac{\varepsilon}{x-1}$

$0<\left|x+\frac{1}{2}\right|<\delta \Rightarrow \left|2x^2-x-1\right| = \left|(2x+1)(x-1)\right| = \left|\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| = \left|x+\frac{1}{2}\right|\left|\frac{x-1}{2}\right|$

$= \left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{x-1} < \varepsilon$

Gambar 4. Bukti Limit yang Bermasalah

Di akhir, mahasiswa memilih $\delta=\frac{\varepsilon}{x-1}$. Padahal, nilai $\frac{\varepsilon}{x-1}$ belum tertentu karena ada variabel *x*, sedangkan nilai δ yang dipilih harus tertentu.

Berdasarkan teori situasi didaktik (Brousseau, 2002), kasus di atas merupakan contoh bagaimana pemahaman sebelumnya yang benar tentang pembuktian limit fungsi linear malah menjadi sumber kendala epistemologis pada saat mahasiswa mengerjakan fungsi lain. Pembuktian limit fungsi linear $f(x)=ax+b,\ a\neq 0$, $\lim\limits_{x\to c}\left(ax+b\right)=ac+b$ adalah contoh yang mudah dalam kajian kalkulus diferensial. Untuk fungsi ini, proses pembuktian dengan definisi *ε–δ* hampir selalu berakhir dengan langkah yang sangat sederhana: $\left|(ax+b)-(ac+b)\right|=\left|a(x-c)\right|=\left|a\right|\left|x-c\right|$, sehingga, untuk memenuhi $\left|f(x)-(ac+b)\right|<\varepsilon,$ langsung dipilih $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$.

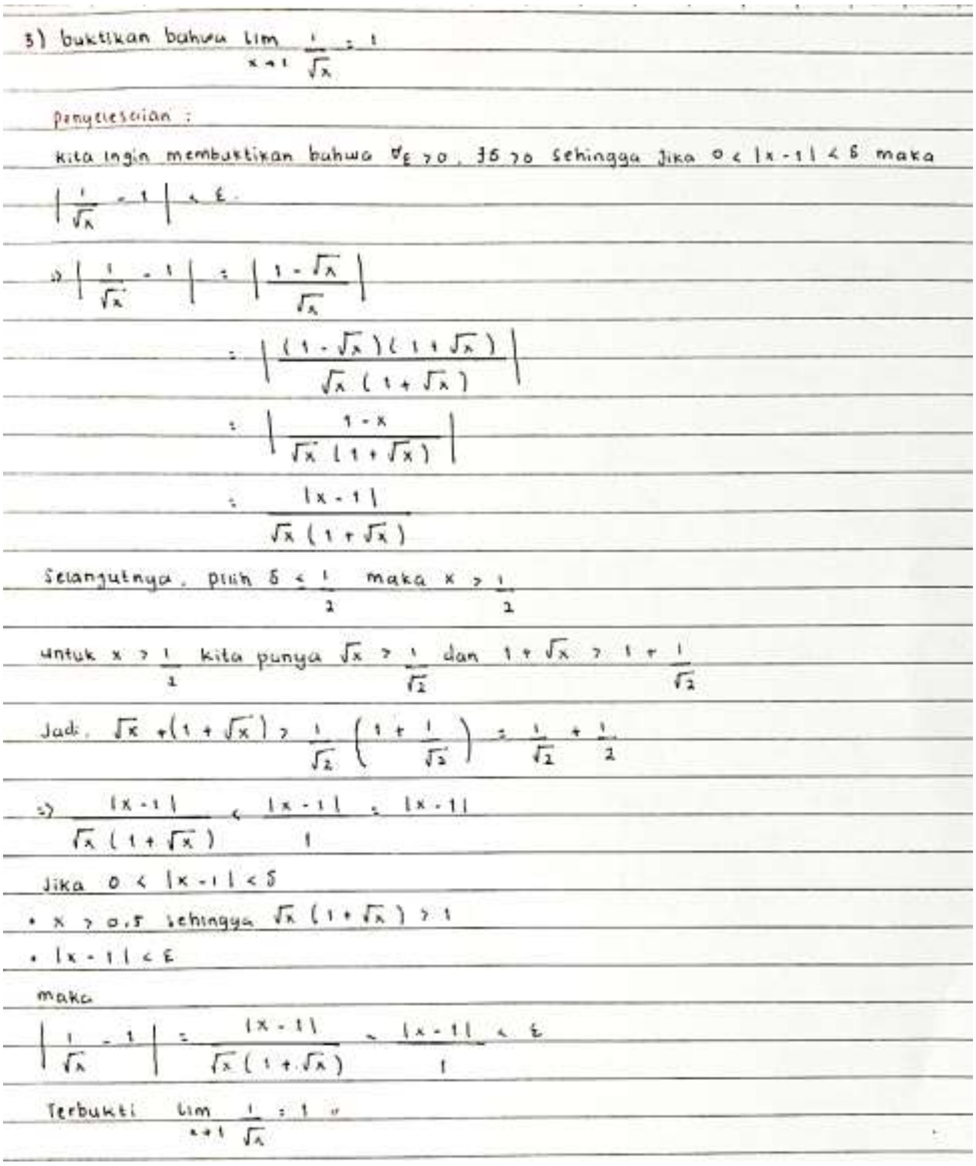
Pembuktian limit tersebut cenderung hanya memerlukan manipulasi aljabar dengan pemahaman struktur logika sederhana tentang definisi formal limit. Ini menunjukkan bagaimana hal yang pernah ditemukan atau pengetahuan sebelumnya bisa menjadi kendala belajar (McGowen & Tall, 2013). Kendala ini bisa juga berakar pada pemahaman mahasiswa dalam aljabar dasar tentang penyelesaian pertidaksamaan $ax<b\Rightarrow x<\dfrac{b}{a},$ yang benar asalkan $0<a.$ Semua sesungguhnya benar pada konteks sebelumnya, akan tetapi tidak tepat lagi pada situasi baru. Ini bukanlah kesalahan tetapi kendala (Brousseau, 2002). Dalam bukti limit, $\left|x-1\right|$ adalah variabel yang justru dibatasi oleh *δ*, sehngga tidak boleh muncul dalam definisi *δ*. Namun mahasiswa memindahkan pola-pola aljabar ke dalam konteks limit, menghasilkan kesalahan, di antaranya: memperlakukan $\left|x-1\right|$ seperti konstanta yang boleh ditempatkan sebagai penyebut, lupa bahwa $\left|x-1\right|<\delta$ adalah syarat, bukan nilai tetap, dan gagal melihat bahwa δ harus ditentukan sebelum *x* dipilih, bukan sesudahnya.

Terkait dengan kendala didaktis, masalah yang dihadapi oleh mahasiswa dalam pembuktian limit bisa disebabkan struktur pembelajaran yang dijalani (Brousseau, 2002). Peran dosen menjadi berbeda dengan peran guru matematika di sekolah. Mahasiswa diharapkan melaksanakan pembelajaran mandiri yang lebih banyak di luar kelas. Pertemuan di kelas lebih banyak diisi dengan diskusi tentang pengetahuan yang mahasiswa bangun dalam pengkajian mandiri mereka di luar kelas. Dalam kasus pembuktian limit bermasalah yang dibahas di sini, sangat mungkin mahasiswa terkendala oleh pola pembuktian tertentu yang mereka posisikan sebagai cara baku. Cara itu sudah tidak lagi berdasar pada pemahaman konseptual-relasional, tetapi berubah menjadi prosedural-mekanistis—meminjam teori pemahaman Skemp (2016).

Dalam kasus tersebut, bentuk: $\left|2x^2 - x - 1\right| = \left|(2x+1)(x-1)\right|$ mendorong mahasiswa untuk memisahkan faktor-faktor dalam nilai mutlak, dan kemudian mencoba "menyelesaikan" ketaksamaan seperti aljabar biasa. Di lain pihak, ketika mahasiswa terbiasa dengan contoh linear, mereka selalu menemui bentuk akhir: $\left|x-1\right| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Dan, ini menjadi semacam mekanisme baku yang mungkin mahasiswa pahami dan dicoba digeneralisasi pada kasus yang tidak sesuai. Mekanisme ini kemungkinan dipicu oleh terbatasnya latihan pembuktian yang dipelajari oleh mahasiswa di kelas perkuliahan atau di luar kelas secara mandiri. Padahal, bahan pembelajaran termasuk contoh pembuktian limit fungsi yang beraneka ragam tersedia dalam buku-buku teks perkuliahan (lihat, misalnya, Varberg, 2014 atau Adams & Essex, 2018). Latihan dan pemahaman pembuktian limit yang memadai seharusnya menghindarkan mahasiswa dari sikap mengandalkan manipulasi simbol, dan mereka seharusnya membuktikan limit dengan mengandalkan penalaran definisi ε–δ yang benar.

Kendala lain yang dapat diamati dari pembuktian yang ditampilkan oleh mahasiswa adalah kendala ontogenetik. Ini terjadi Ketika seseorang tidak berada pada tingkatan kognitif tertentu untuk memahami struktur logis yang lebih rumit (Brousseau, 2002). Dalam kasus ini, tampak bahwa mahasiswa belum mencapai kematangan penalaran untuk menyadari bahwa: δ harus ditentukan sebelum x, δ tidak boleh bergantung pada $\left|x-1\right|$, ketergantungan melingkar (δ didefinisikan dari sesuatu yang bergantung pada δ) adalah tidak sahih, dan pembuktian ε–δ adalah argumentasi berkuantor ganda (untuk setiap ε positif, terdapat δ positif, sedemikian sehingga ...), bukan manipulasi aljabar langsung. Mahasiswa menunjukkan kecenderungan berpikir bahwa kalimat matematika harus dimanipulasi hingga menghasilkan bentuk $\left|x-c\right| < d$.

Pembuktian kedua yang diujikan ke mahasiswa adalah $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}}=1.$ Tidak ada sama sekali bukti yang lengkap dan benar yang dihasilkan. Dari semua mahasiswa yang membangun bukti untuk limit tersebut dikerjakan, hanya satu yang hampir benar. Petikan bukti tersebut ditampilkan pada Gambar 5.



3) buktikan bahwa $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$

penyelesaian :

kita ingin membuktikan bahwa $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ sehingga jika $0<|x-1|<\delta$ maka $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right|<\varepsilon$.

$\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right| = \left|\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|$

$= \left|\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\right|$

$= \left|\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\right|$

$= \frac{|x-1|}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

Selanjutnya, pilih $\delta<\frac{1}{2}$ maka $x>\frac{1}{2}$

untuk $x>\frac{1}{2}$ kita punya $\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $1+\sqrt{x}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

Jadi, $\sqrt{x}+(1+\sqrt{x})>\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{|x-1|}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}<\frac{|x-1|}{1}=|x-1|$

Jika $0<|x-1|<\delta$

- $x>0.5$ sehingga $\sqrt{x}(1+\sqrt{x})>1$
- $|x-1|<\varepsilon$

maka

$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right|=\frac{|x-1|}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}<\frac{|x-1|}{1}<\varepsilon$

Terbukti $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ //

Gambar 5. Bukti Limit yang Hampir Benar

Pembuktian ini belum selesai. Bagian awal yang memuat analisis pendahuluan untuk menentukan batas untuk $\frac{1}{|\sqrt{x}||\sqrt{x}+1|}=\frac{1}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}$ ditempuh dengan benar berdasarkan batas atas $\delta \le \frac{1}{2}$. Selanjutnya, diperoleh batas bawah $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{x}$ dan $\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{x} + 1$. Jadi, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) < \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)$. Dengan $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$, akhirnya diperoleh $1 < \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)$ atau $\frac{1}{\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x} + 1\right|} < 1$. Ini mengarahkan pada bentuk paling sederhana:

$$0 < |x - 1| < \delta \le \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)} - 1\right| = \frac{|x - 1|}{\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x} + 1\right|} < |x - 1| < \delta.$$

Dengan kesimpulan awal bahwa $\left|\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)} - 1\right| < \varepsilon,$ maka diperoleh relasi $\delta \le \varepsilon$. Dari analisis pendahuluan ini akhirnya diperoleh bahwa $\delta = \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{2}\right\}$. Hanya saja, bukti sebenarnya untuk limit tersebut tidak dituliskan secara lengkap, dan juga pemilihan nilai δ tidak diperjelas.

Batas δ sebenarnya tidak tunggal. Untuk $\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1,$ kita bisa menentukannya berdasarkan bentuk dasar: $\left|\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)} - 1\right| = \frac{|x - 1|}{\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x} + 1\right|} < K\delta,$ di mana K adalah batas bawah dari $\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x} + 1\right|$. Dengan $\delta \le \frac{1}{2}$, diperoleh batas bawah terbesar untuk $\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x} + 1\right|$, yaitu, $\frac{1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) < \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)$, jadi $\left|\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)}\right| < \frac{2}{1 + \sqrt{2}}$ dan $\left|\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)} - 1\right| = \frac{|x - 1|}{\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x} + 1\right|} < \frac{2\delta}{1 + \sqrt{2}}$. Dari sini, ditentukan nilai $\delta = \min\left\{\frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Selain itu, bisa juga diambil batas bawah yang lain untuk $\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x}+1\right|$, yaitu, $\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{x}\sqrt{x}<\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$, jadi $\left|\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|<2$. Dari sini, ditentukan nilai $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}\right\}$.

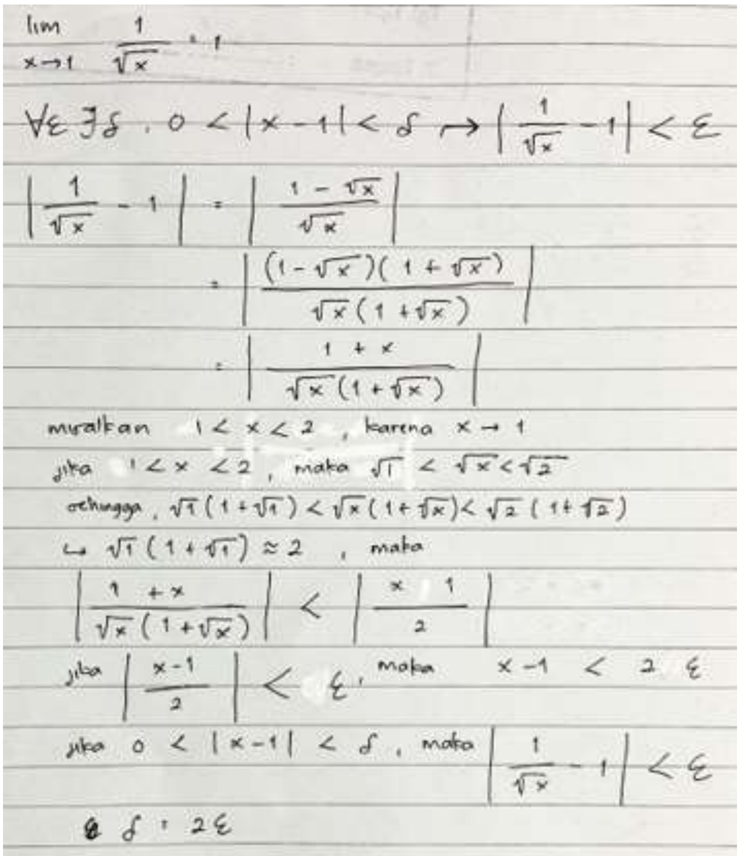
Dalam pembuktian limit, analisis pendahuluan sebenarnya adalah catatan di luar bukti yang memandu pemilihan nilai δ. Tetapi, bagian penting dari langkah membangun argumen untuk membuktikan limit justru terletak pada prosedur pemilihan nilai δ tersebut. Setelah nilai tersebut ditentukan, selanjutnya dirangkai bukti yang sebenarnya sebagai berikut:

Misalkan diberikan $\varepsilon>0$ sebarang. Selanjutnya, dipilih $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}\right\}$; yaitu, dipilih δ yang lebih kecil di antara $\frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{2}$. Misalkan $\frac{\varepsilon}{2}<\frac{1}{2}$, maka $0<\left|x-1\right|<\delta$ berakibat bahwa $\left|\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)}-1\right|=\frac{\left|x-1\right|}{\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x}+1\right|}<2.\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$ Misalkan $\frac{1}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$, ini berakibat bahwa $\left|\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)}-1\right|=\frac{\left|x-1\right|}{\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x}+1\right|}<2.\frac{1}{2}=1<\varepsilon.$

Selanjutnya, tidak ada bukti $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ yang dibangun dengan lengkap dan benar oleh mahasiswa peserta penelitian. Satu pembuktian mencoba menentukan batas untuk $\left|\sqrt{x}\right|\left|\sqrt{x}+1\right|$ dengan menetapkan $\delta\le1$ (lihat Gambar 6). Sayangnya, pertidaksamaan yang dihasilkan tidak tepat: $\left|x-1\right|<1\Rightarrow1<x<2.$ Ini hanya mungkin tepat untuk limit kanan di $x=1.$ Selanjutnya, diperoleh:

$$\left|x-1\right|<1\Rightarrow\sqrt{1}<\sqrt{x}<\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{1}\left(\sqrt{1}+1\right)<\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)<\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Batas yang diambil adalah batas bawah, $2<\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$, yang sebenarnya merupakan pengambilan batas yang tepat. Batas ini ditindaklanjuti dan diperoleh $\delta=2\varepsilon.$ Bukti berhenti di sini, dan tidak dilanjutkan dengan bukti formal limit yang seharusnya diawali dengan penentuan nilai delta yang tepat.


$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, . \, 0 < |x-1| < \delta \rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right| = \left| \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right|$

$= \left| \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \right|$

$= \left| \frac{1+x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \right|$

misalkan $1 < x < 2$, karena $x \to 1$

jika $1 < x < 2$, maka $\sqrt{1} < \sqrt{x} < \sqrt{2}$

sehingga , $\sqrt{1}(1+\sqrt{1}) < \sqrt{x}(1+\sqrt{x}) < \sqrt{2}(1+\sqrt{2})$

$\hookrightarrow \sqrt{1}(1+\sqrt{1}) \approx 2$, maka

$\left| \frac{1+x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \right| < \left| \frac{x \quad 1}{2} \right|$

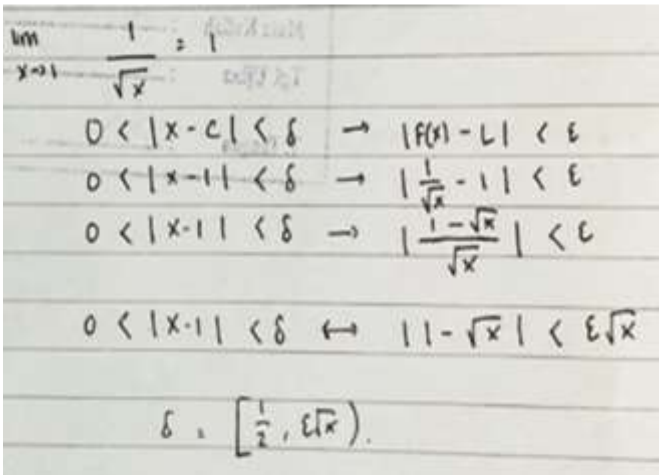
jika $\left| \frac{x-1}{2} \right| < \varepsilon$, maka $x-1 < 2\varepsilon$

jika $0 < |x-1| < \delta$, maka $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right| < \varepsilon$

$\delta = 2\varepsilon$

Gambar 6. Penentuan Nilai Delta yang Salah

Tidak ada bukti lain yang mengupayakan lebih jauh dari bukti yang tertera pada Gambar 6 di atas. Pada dasarnya mereka semua bisa menuliskan definisi untuk limit yang akan dibuktikan: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right| < \varepsilon.$ Akan tetapi, mereka tidak mampu menentukan batasan yang dibutuhkan (Gambar 7).


$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

$0 < |x-c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$0 < |x-1| < \delta \rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right| < \varepsilon$

$0 < |x-1| < \delta \rightarrow \left| \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right| < \varepsilon$

$0 < |x-1| < \delta \leftrightarrow |1-\sqrt{x}| < \varepsilon\sqrt{x}$

$\delta = \left[\frac{1}{2}, \varepsilon\sqrt{x} \right).$

Gambar 7. Analisis Pendahuluan yang Salah

Dalam analisis pendahuluan, diperoleh:

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| < \varepsilon.$$

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|1-\sqrt{x}\right| < \varepsilon\sqrt{x}.$$

Dari kedua bukti di atas, ditemukan bahwa masalah yang mahasiswa hadapi dalam membuktikan limit terkait erat dengan pemahaman mereka tentang konsep nilai mutlak dengan segala macam sifatnya. Ini adalah sesuatu wajar karena definisi limit itu sendiri dibangun berdasarkan konsep nilai mutlak termasuk hubungan implikasi antara dua bentuk nilai mutlak, yaitu, hipotesis dan kesimpulan pada fungsi pernyataan dalam kalimat definisi tersebut. Temuan penelitian ini menunjukkan bahwa kendala paling dominan justru terletak pada ketidakpahaman mahasiswa terhadap konsep nilai mutlak dan sifat-sifatnya**,** bukan pada gagalnya mereka memahami limit itu sendiri. Ini lebih banyak bersifat ontogenetik daripada epistemologis. Tall (1992) dan Alcock dan Simpson (2004) menemukan juga bahwa kesulitan terkait dengan nilai mutlak dan pertidaksamaan adalah kendala yang dominan dalam transisi ke analisis formal matematika.

Bagi sebagian mahasiswa, nilai mutlak dipahami secara terbatas sebagai operasi uner untuk menghilang tanda negatif, yang tepat untuk konteks aljabar elementer. Dalam Kalkulus atau Analis Real, khususnya dalam pembuktian limit, nilai mutlak berfungsi sebagai penentu jarak, yang memungkinkan peralihan dari $|x-1|$ ke $|f(x)-L|$ yang bersesuaian. Tanpa pemahaman nilai mutlak sebagai objek matematis yang menyatakan jarak, mahasiswa sulit untuk menafsirkan $|x-c| < \delta$ sebagai keberadaan x pada interval tertentu; mengendalikan perilaku fungsi pada domain yang dipersempit; dan menggunakan sifat nilai mutlak untuk menentukan batas untuk ekspresi yang lebih kompleks.

Pada Gambar 7, dapat dilihat bahwa mahasiswa berhenti pada $\left|\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| < \varepsilon.$ Mahasiswa tidak melanjutkan untuk membentuk hasil bagi bentuk nilai mutlak, apalagi menganalisis komponen pembagian secara terpisah, khususnya menentukan batas penyebut secara lokal. Ini semua terkait dengan konsep dan sifat-sifat nilai mutlak. Kendala lain yang dihadapi adalah ketidakmampuan melakukan perbandingan dua kuantitas positif, yang sebenarnya sangat berguna dalam penyederhanaan relasi bentuk-bentuk nilai mutlak yang terlibat dalam pembuktian limit. Cara kerja ini mewakili banyak mahasiswa dalam membuktikan $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$.

Dibandingkan dengan bukti $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\left(2x^2-x\right)=1$, bukti $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ memunculkan kendala lain (dan baru) bagi mahasiswa karena yang akan ditentukan batasnya berdasarkan $|x-c|<\delta$ adalah kebalikan dari ekspresi nilai mutlak, bukan nilai mutlak biasa. Tampaknya, kendala yang dihadapi mahasiswa lebih besar dalam menentukan batas bentuk kebalikan nilai mutlak dibandingkan dengan nilai mutlak yang biasa.

Dari hasil penelitian, tidak ada responden lagi yang menunjukkan langkah yang lebih maju sedikit, misalnya, merubah $\left|\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|<\varepsilon$ menjadi $\left|\frac{1-x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|=\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|=\frac{|x-1|}{\left|\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)\right|}<\varepsilon.$ Ini menunjukkan kendala ontogenetik yang lain terkait dengan perubahan perkalian satu ekspresi dengan bentk kawannya, yang tujuannya, dalam kasus ini, adalah untuk memunculkan bentuk $|x-1|$. Pun kalau itu dilanjutkan, kemungkinan mahasiswa tidak bisa maju ke langkah berikutnya untuk menentukan batas atas $\frac{1}{\left|\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)\right|}$. Ini ditunjukkan di pembuktian di Gambar 6 di atas.

Banyak lagi hal yang harus dipikirkan oleh mahasiswa dalam langkah-langkah selanjutnya untuk menyelesaikan bukti. Mereka harus memilih batas atas delta yang menjamin bahwa *x* akan jauh di sebelah kanan 0, sehingga terhindar dari pembagian dengan 0 pada saat menentukan batas kebalikan dari $\left|\sqrt{x}\right|$. Mereka harus mampu mengoordinasikan batas-batas atas dari $\frac{1}{\left|\sqrt{x}\right|}$ dan $\frac{1}{\left|1+\sqrt{x}\right|}$, dan ini semua bergantung pada batas delta. Berbagai langkah yang saling terkait ini bisa memberi kelebihan beban kognitis pada mahasiswa, yang oleh Tall (1992) disebut sebagai kerapuhan konseptual, yang terjadi masa masa transisi ke kajian analisis real. Belum lagi, deretan kuantor dan operasi logika yang muncul pada pernyataan definisi limit. Membangun bukti limit yang lengkap dan benar menuntut mahasiswa untuk merangkaikan dan mengaitkan satu prosedur atau langkah dengan yang lain. Ini menjadi satu kendala belajar juga, sebagaimana yang telah jauh sebelumnya diamati oleh Moore (1994), bahwa mahasiswa belum memandang bukti sebagai rangkaian batasan-batasan yang saling bergatung secara logis.

D. Kesimpulan

Kesulitan mahasiswa dalam pembuktian epsilon–delta berasal dari interaksi antara kendala epistemologis, ontogenetik, dan didaktis. Pemahaman tentang konsep nilai mutlak beserta sifat-sifatnya dan logika merupakan fondasi utama bagi keberhasilan pembuktian formal limit. Mahasiswa harus mampu mengaitkan langkah-langkah dan batasan-batasan yang saling bergantung secara logis, dan menjauhkan diri dari keterjebakan dengan aturan-aturan yang hanya berlaku pada konteks atau domain tertentu, untuk menghasilkan bukti pernyataan matematis yang lengkap dan benar.

Daftar Pustaka

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 1–32. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047051.07646.92

Anton, H., Bivens, I. C., & Davis, S. (2022). *Calculus* (Edisi ke-12). Wiley.

Ary, D., Jacobs, L. C., Irvine, C. K. S., & Walker, D. A. (2019). *Introduction to research in education* (Edisi ke-10). Cengage.

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2015). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *37*, 36–47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.11.003

Bell, F. H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in secondary school)*. Wm. C. Brown.

Breen, S., & O'Shea, A. (2016). Threshold concepts and undergraduate mathematics teaching. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *26*(9), 837–847. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1191573

Bressoud, D. (2018, 31 Januari). Why colleges must change how they teach calculus. *The Conversation*. http://theconversation.com/why-colleges-must-change-how-they-teach-calculus-90679

Bressoud, D., Johnston, E., Murphy, C., Rhea, K., Williams, J., & Zorn, P. (2015). The calculus sequence. Dalam P. Zorn (Ed.), *2015 CUPM Curriculum Guide to Majors in the Mathematical Sciences* (h. 17–25). Mathematical Association of America.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.

Cornu, B. (1991). Limits. Dalam D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (h. 153–166). Kluwer.

Darwis, M. (1994). *Hubungan antara persepsi mahasiswa terhadap efektivitas pengajaran dosen, sikap terhadap kalkulus, dan penguasaan logika elementer dengan tingkat pemahaman konsep kalkulus di FPMIPA IKIP Ujungpandang* [Tesis magister tidak diterbitkan]. IKIP Malang.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V., & Weigand, H. G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 99–129. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0100-x

Hass, J., Heil, C., & Weir, M. (2020). *Thomas' calculus* (Edisi ke-14 Unit SI). Pearson Education.

Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O., & Valero, P. (Eds.). (2005). *Meaning in mathematics education*. Springer.

Klausmeier, H. J. (1992). Concept learning and concept teaching. *Educational Psychologist, 27*(3), 267–286. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2703_1

Kuckartz, U., & Rädiker, S. (2023). *Qualitative content analysis: Methods, practice and software*. Sage.

Lee, J., Yi, M., Song, W., Dwyer, J., Williams, B., & Moskal, B. (2025). Revised calculus concept inventory: Measuring the learning gains of students in a first calculus course. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s40753-025-00266-6

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 259–288. https://doi.org/10.1023/A:1016004822476

McGowen, M. A., & Tall, D. (2013). Flexible thinking and met-befores: Impact on learning mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 527–537. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.06.004

Melhuish, K. (2019). The group theory concept assessment: A tool for measuring conceptual understanding in introductory group theory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 5*(3), 359–393. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00093-6

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educatonal Studies in Mathematics, 27*(3), 249–266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

National Center for Education Statistics. (2018). *Digest of education statistics*, 2016 (NCES 2017–094). U.S. Department of Education. https://nces.ed.gov/pubs2017https://nces.ed.gov/programs/digest/

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103–132. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017667.70982.05

Rohde, U. L., Jain, G. C., Poddar, A. K., & Ghosh, A. K. (2012). *Introduction to integral calculus: Systematic studies with engineering applications for beginners*. John Wiley & Sons.

Simon, M. A. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 117–137. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9728-1

Simon, M. A., Placa, N., & Avitzur, A. (2016). Participatory and anticipatory stages of mathematical concept learning: Further empirical and theoretical development. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(1), 63–93. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.1.0063

Skemp, R. R. (2016). *The psychology of learning mathematics* (Edisi Amerika diperluas). Routledge.

Smart, A. (2013). *Undergraduate students' connections between the embodied, symbolic and formal mathematical worlds of limits and derivatives: A qualitative study using Tall's three worlds of mathematics* (Terbitan No. NR98425) [Tesis doktor, University of Ottawa]. ProQuest Dissertations and Theses Global.

Stewart, J., & Kokoska, S. (2023). *Calculus: Concepts and Contexts* (Edisi ke-5). Cengage.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. Dalam D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (h. 495–551). National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/bf00305619

Thompson, P. W., Milner, P. I. F., & Ashbrook, M. (2018). *Final report for DUE-1625678 project DIRACC: Developing and investigating a rigorous approach to conceptual calculus*. https://patthompson.net/ThompsonCalc/AnnualReports.pdf

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2014). *Calculus* (Edisi internasional baru). Pearson Education.

Viirman, O. (2014). *The function concept and university mathematics teaching* [Disertasi doktor, Karlstad University]. Digitala Vetenskapliga Arkivet. http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/FULLTEXT01.pdf

Vinner, S. (2018). *Mathematics, education, and other endangered species*. Springer.

Weigand, H.-G. (2014). Begriffsbildung. Dalam R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, H.-G. Weigand. (Ed.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (h. 255–78). Springer.