

EKSPLORASI PEMAHAMAN NILAI MUTLAK MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA BERBASIS *THREE WORLDS OF MATHEMATICS*

Takdirmin¹, Agusalim Juhari^{2*}

Universitas Muhammadiyah Makassar¹, Universitas Negeri Makassar²

takdirmin@unismuh.ac.id¹, agusalimjuhari@unm.ac.id^{2*}

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan pemahaman mahasiswa Pendidikan Matematika terhadap konsep nilai mutlak berdasarkan kerangka *Three Worlds of Mathematics* (Tall), yang meliputi *embodied world*, *symbolic–proceptual world*, dan *formal–axiomatic world*. Penelitian menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif dengan subjek 15 mahasiswa yang dipetakan ke dalam tiga kategori *world* melalui tes diagnostik. Tiga subjek utama (M1, M2, dan M3) dipilih secara purposive untuk diwawancara lebih mendalam. Analisis data dilakukan menggunakan model Miles, Huberman, dan Saldaña (2014). Hasil penelitian menunjukkan bahwa (1) Distribusi pemahaman mahasiswa berdasarkan *Three Worlds of Mathematics* menunjukkan bahwa *symbolic–proceptual world* merupakan dunia yang paling dominan, Sebanyak 53.3% mahasiswa berada pada dunia simbolik, 26.7% pada *embodied world*, dan hanya 20% pada *formal–axiomatic world*. Hal ini menegaskan bahwa mayoritas mahasiswa lebih menguasai prosedur aljabar nilai mutlak dibandingkan pemahaman visual maupun definisi formalnya, (2) Mahasiswa *embodied world* memahami nilai mutlak sebagai jarak, tetapi kesulitan mentransformasikan intuisi visual ke representasi simbolik. Mahasiswa mampu menggambar garis bilangan dan menentukan dua solusi berdasarkan jarak, tetapi belum mampu menuliskannya secara simbolik dalam bentuk positif dan negatif secara tepat. *Koneksi embodied* ke *symbolic* belum terbentuk secara kuat, (3) Mahasiswa *symbolic–proceptual world* menguasai prosedur penyelesaian dua bentuk positif dan negatif, tetapi pemahamannya bersifat mekanistik. Mahasiswa menyelesaikan soal nilai mutlak dengan cepat dan tepat, namun tidak memahami alasan matematis di balik langkah tersebut. Representasi simbolik tidak terhubung dengan makna visual ataupun definisi formal nilai mutlak, dan (4) Mahasiswa *formal–axiomatic world* memahami definisi formal nilai mutlak, tetapi belum mampu menghubungkannya dengan representasi visual. Mahasiswa dapat menjelaskan fungsi bersyarat dan memberikan justifikasi matematis yang tepat, namun kesulitan menjelaskan grafik nilai mutlak sebagai representasi jarak. Integrasi *formal* ke *embodied* belum terjadi secara utuh.

Katakunci: Pemamaham Nilai Mutlak, *Three Worlds of Mathematics*, *embodied*, *symbolic–proceptual*, *formal–axiomatic*

A. Pendahuluan

Nilai mutlak merupakan salah satu konsep fundamental dalam matematika yang sering kali dianggap sederhana oleh mahasiswa, namun justru menyimpan kompleksitas konseptual yang tinggi ketika ditelusuri secara lebih mendalam. Banyak mahasiswa memahami nilai mutlak hanya sebagai “bilangan yang selalu positif” atau “tanda minus yang dihilangkan”, sehingga mereka memaknai notasinya secara prosedural dan bukan secara konseptual. Akibatnya, ketika mereka berhadapan dengan bentuk nilai mutlak yang lebih kompleks, seperti $|x - a| = k$, $|f(x)| = c$, atau bentuk ganda atau bersarang seperti $|2x - |x - 1||$, pemahaman yang dangkal tersebut tidak dapat menopang proses berpikir matematis secara tepat. Kondisi ini menunjukkan adanya kesenjangan antara intuisi mahasiswa dan struktur formal konsep matematis yang seharusnya mereka kuasai (Tall, 2013).

Secara historis, studi mengenai pemahaman siswa terhadap konsep matematika menunjukkan bahwa banyak miskonsepsi muncul karena ketidakmampuan menghubungkan representasi intuitif, simbolik, dan formal dari suatu konsep (Vinner & Dreyfus, 1989; Tall, 2004). Pada konteks nilai mutlak, miskonsepsi yang sering muncul berkaitan dengan kesalahan interpretasi jarak, ketidakpahaman terkait pusat translasi pada $|x - a|$, serta kecenderungan memprosedurkan konsep tanpa memahami justifikasi matematis di balik proses tersebut. Hal ini sesuai dengan temuan berbagai penelitian yang mengungkap bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan dalam memaknai nilai mutlak sebagai fungsi *piecewise* yang memiliki dua definisi berbeda tergantung pada kondisi domainnya (Cahyaningtyas & Rahardi, 2021; Vhantoria, 2022; Irsyadi et al., 2022). Penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa kesulitan yang muncul tidak hanya bersifat prosedural, tetapi juga bersumber dari struktur konseptual yang tidak utuh.

Pendekatan tradisional dalam pembelajaran nilai mutlak di perguruan tinggi masih cenderung menekankan manipulasi simbol dan penyelesaian persamaan melalui teknik mekanistik seperti “membuat dua bentuk” atau “mengganti tanda negatif”. Walaupun teknik tersebut benar secara algoritmis, mahasiswa sering kali gagal memahami makna matematis mengapa dua bentuk tersebut muncul, dan kapan teknik tersebut dapat atau tidak dapat diterapkan. Ketika mahasiswa hanya

menghafal prosedur tanpa pemahaman intuitif dan formal yang memadai, mereka cenderung melakukan kesalahan sistematis seperti menyelesaikan $|x| = -3$ sebagai $x = 3$ atau $x = -3$, atau mengerjakan $|x - 3| = 4$ sebagai $|x| = 4$ sehingga kehilangan makna translasi jarak (Syahda & Pujiastuti, 2020). Temuan ini mempertegas perlunya pendekatan yang lebih holistik untuk memahami bagaimana mahasiswa membangun konsep nilai mutlak.

David Tall (2004; 2013) menawarkan kerangka teoretis yang sangat relevan untuk menganalisis fenomena ini, yaitu teori Three Worlds of Mathematics, yang membagi pemikiran matematis ke dalam tiga dunia: *embodied*, *symbolic-proceptual*, dan *formal-axiomatic*. Dalam dunia *embodied*, mahasiswa membangun konsep melalui pengalaman visual, manipulatif, atau intuitif seperti memahami nilai mutlak sebagai “jarak dari nol”. Dalam dunia *symbolic-proceptual*, mahasiswa mulai bekerja dengan simbol dan prosedur seperti $|x| = x$ atau $|x| = -x$ berdasarkan kondisi tertentu. Pada dunia *formal-axiomatic*, mahasiswa memahami definisi formal nilai mutlak sebagai fungsi *piecewise* (fungsi bersyarat), termasuk sifat-sifatnya serta justifikasi logis di balik struktur definisi tersebut. Kerangka ini memungkinkan peneliti untuk melihat perkembangan atau stagnasi pemahaman mahasiswa secara komprehensif.

Meskipun teori Three Worlds telah digunakan secara luas untuk menganalisis pemahaman konsep limit, fungsi, turunan, dan integral (Tall, 2013; Oikkonen & Hannula, 2022), penggunaannya dalam konteks nilai mutlak masih sangat jarang dieksplorasi, terutama di lingkungan pendidikan tinggi di Indonesia. Padahal, nilai mutlak merupakan konsep dasar yang memengaruhi kemampuan mahasiswa dalam memahami topik-topik lanjutan seperti persamaan, pertidaksamaan, fungsi piecewise, norma vektor, hingga jarak dalam ruang metrik. Keterbatasan penelitian mengenai nilai mutlak berbasis *Three Worlds* menjadi celah penting yang perlu diisi agar dapat memberikan kontribusi baru dalam pengembangan pedagogi matematika, terutama dalam pembentukan pemahaman konseptual mahasiswa calon guru.

Penelitian-penelitian sebelumnya tentang kesalahan pada materi nilai mutlak lebih banyak menggunakan teori analisis kesalahan seperti Kastolan, Newman, Watson, atau tahapan Polya (Syahda & Pujiastuti, 2020; Vhantoria, 2022;

Anam et al., 2022). Teori-teori ini sangat berguna untuk mengidentifikasi jenis kesalahan prosedural, teknis, atau transformasi yang dilakukan siswa. Namun, teori tersebut kurang mampu menjelaskan bagaimana struktur pemikiran mahasiswa terbentuk dari pengalaman intuitif, manipulasi simbol, hingga pemahaman definisi formal. Dengan demikian, analisis berbasis Three Worlds memberikan perspektif epistemologis yang lebih dalam untuk memahami akar miskONSEPSI nilai mutlak yang tidak terlihat melalui analisis kesalahan tradisional.

Salah satu persoalan utama dalam pemahaman nilai mutlak adalah kesenjangan (gap) antara apa yang mahasiswa visualisasikan (*embodied*) dan prosedur yang mereka lakukan (*symbolic*). Banyak mahasiswa yang dapat menggambar nilai mutlak sebagai bentuk “V” tetapi tidak memahami bahwa grafik tersebut merupakan representasi dari definisi piecewise dan merepresentasikan jarak dari titik nol. Ketidaksinkronan antara visualisasi dan prosedur ini menyebabkan mahasiswa memisahkan pemahaman intuitif dari operasi aljabar, sehingga mereka tidak dapat menjelaskan langkah-langkah simbolik secara konseptual. Hal ini telah dibuktikan oleh Tall (2013) dan Dawkins (2015) yang menunjukkan bahwa kegagalan dalam menghubungkan representasi antar dunia menjadi penyebab utama miskONSEPSI pada berbagai konsep matematika. Selain itu, studi mengenai pendidikan matematika menunjukkan bahwa mahasiswa calon guru matematika sering kali memiliki pemahaman konseptual yang belum stabil pada konsep-konsep dasar, termasuk nilai mutlak (Cahyaningtyas & Rahardi, 2021; Irsyadi et al., 2022). Ketika pemahaman nilai mutlak tidak matang pada tingkat perguruan tinggi, mereka berpotensi meneruskan pemahaman yang keliru kepada siswa ketika mereka menjadi guru. Oleh sebab itu, mengeksplorasi kedalaman pemahaman mahasiswa terhadap nilai mutlak bukan hanya penting untuk kepentingan akademik, tetapi juga memiliki implikasi langsung terhadap kualitas pembelajaran matematika di sekolah.

Dalam konteks mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Makassar (Unismuh), nilai mutlak merupakan materi yang sudah ditemui sejak SMA namun tetap menjadi sumber kesulitan dalam mata kuliah dasar aljabar atau kalkulus. Mahasiswa sering kali mengaku memahami topik ini karena sudah “sering dikerjakan”, tetapi ketika diberikan soal nonrutin atau diminta

menjelaskan konsepnya secara verbal, banyak yang tidak mampu memberikan penjelasan yang utuh. Fenomena ini menunjukkan bahwa pemahaman mahasiswa mungkin terjebak dalam dunia *symbolic-proceptual* dan tidak masuk ke dunia *formal-axiomatic*. Kondisi ini menjadikan analisis berbasis Three Worlds sangat relevan untuk memetakan perkembangan kognitif mereka terhadap nilai mutlak. Dengan demikian, penelitian ini dilakukan untuk mengeksplorasi kedalam pemahaman nilai mutlak mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh menggunakan kerangka *Three Worlds of Mathematics*. Kerangka ini akan memungkinkan peneliti melihat secara rinci bagaimana mahasiswa membangun pemahaman nilai mutlak, dunia mana yang paling dominan, serta di mana letak kesenjangan konsep yang menyebabkan miskonsepsi. Analisis ini diharapkan dapat memberikan kontribusi teoretis dan praktis dalam pengembangan pedagogi matematika, khususnya dalam pembelajaran konsep nilai mutlak.

Berdasarkan uraian tersebut diatas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut (1) Bagaimana distribusi dominasi pemahaman nilai mutlak mahasiswa berdasarkan *Three Worlds of Mathematics*, (2) Bagaimana pemahaman mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh terhadap konsep nilai mutlak ditinjau dari *embodied world*? (3) Bagaimana pemahaman mahasiswa dalam menyelesaikan nilai mutlak ditinjau dari *symbolic-proceptual world*? (4) Bagaimana pemahaman mahasiswa terhadap definisi formal nilai mutlak ditinjau dari *formal-axiomatic world*?

Teori *Three Worlds of Mathematics*, yang dikemukakan oleh Tall (2004; 2013), memberikan kerangka konseptual yang sangat kuat untuk memahami bagaimana seseorang membangun pemahaman matematika. Tiga dunia yang dimaksud adalah *embodied world*, *symbolic-proceptual world*, dan *formal-axiomatic world*. Pada dunia embodied, pemahaman konsep berkembang melalui pengalaman visual, manipulatif, dan intuitif, misalnya memahami nilai mutlak sebagai jarak antara titik x dan 0 pada garis bilangan. Dunia ini berfungsi sebagai dasar bagi konseptualisasi awal mahasiswa sebelum memasuki dunia simbolik.

Dunia *symbolic-proceptual* merupakan tahap ketika mahasiswa mulai bekerja dengan simbol dan prosedur, seperti mengubah $|x| = a$ menjadi dua persamaan atau menerapkan sifat-sifat nilai mutlak melalui manipulasi aljabar.

Dalam dunia ini, terjadi integrasi antara konsep dan prosedur sehingga simbol dapat berfungsi sebagai proses maupun objek (*procept*). Namun, banyak mahasiswa terjebak pada tahap ini dan menjalankan prosedur tanpa pemahaman mendasar.

Dunia *formal-axiomatic* melibatkan definisi formal, teorema, dan pembuktian yang menjadi struktur tertinggi dalam pemahaman matematika. Pada nilai mutlak, tahap ini mencakup pemahaman definisi piecewise, hubungan nilai mutlak dengan fungsi kuadrat, serta syarat-syarat logis yang menentukan apakah suatu persamaan nilai mutlak memiliki solusi. Tall (2013) menegaskan bahwa kesenjangan antara ketiga dunia ini sering menjadi sumber utama miskonsepsi matematika, terutama ketika mahasiswa tidak mampu menghubungkan intuisi embodied dengan prosedur simbolik atau justifikasi formal.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif untuk mengeksplorasi secara mendalam pemahaman mahasiswa mengenai konsep nilai mutlak ditinjau melalui kerangka *Three Worlds of Mathematics* (Tall, 2004, 2013). Pendekatan kualitatif dipilih karena tujuan penelitian tidak hanya untuk mengukur performa, tetapi untuk menelusuri cara mahasiswa membangun makna, menghubungkan representasi, serta menjelaskan proses berpikirnya secara verbal, sesuatu yang tidak dapat dicapai melalui pendekatan kuantitatif (Creswell, 2018). Dengan demikian, data yang dikumpulkan tidak berfokus pada angka, tetapi pada kekayaan penjelasan, konsistensi konsep, dan pola representasi matematika yang muncul dari respons subjek.

Subjek penelitian awal terdiri dari 15 mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Makassar tahun akademik 2025/2026. Seluruh peserta diberikan tes diagnostik yang terdiri dari sembilan soal, yang masing-masing *Three Worlds of Mathematics* Tall yakni tiga soal untuk *embodied world* (visualisasi dan intuisi jarak), tiga soal untuk *symbolic-proceptual world* (manipulasi simbol dan penyelesaian dua bentuk), dan tiga soal untuk *formal-axiomatic world* (definisi formal dan justifikasi matematis). Setiap soal dinilai menggunakan rubrik berskala 0–3 berdasarkan kualitas jawaban. Skor 3 diberikan jika mahasiswa menunjukkan pemahaman lengkap, 2 untuk pemahaman cukup

namun belum sepenuhnya akurat, 1 untuk pemahaman parsial yang disertai kesalahan konseptual, dan 0 jika mahasiswa tidak menunjukkan pemahaman yang sesuai.

Dominasi suatu *worlds* ditentukan dengan ambang skor minimal 6 dari skor maksimum 9 pada dunia tersebut, yang ekivalen dengan 66.7%. Ambang ini dipilih berdasarkan prinsip *criterion-referenced assessment* yang menekankan bahwa penguasaan tercapai apabila peserta dapat menunjukkan pemahaman “cukup” ($\text{skor} \geq 2$) secara konsisten di seluruh butir indikator (Marzano, 2001; Nitko & Brookhart, 2011). Setelah seluruh skor dihitung, setiap mahasiswa dipetakan ke dalam kategori dunia dominan menggunakan hierarki perkembangan Tall, yaitu *embodied* ke *symbolic* ke *formal*. Jika seorang mahasiswa memenuhi ambang lebih dari satu jenis *worlds*, dominasi ditetapkan pada *world* tertinggi yang dicerminkan oleh pola penalarannya. Berdasarkan pemetaan awal terhadap 15 mahasiswa, peneliti kemudian memilih tiga subjek secara *purposive sampling*, yaitu M1 sebagai representasi *embodied world*, M2 sebagai representasi dunia *symbolic-proceptual world*, dan M3 sebagai representasi dunia *formal-axiomatic world*.

Pengumpulan data dilakukan melalui dua teknik utama, yaitu tes diagnostik tertulis dan wawancara semi-terstruktur. Wawancara dilakukan menggunakan pedoman yang terdiri dari sepuluh pertanyaan inti yang diberikan sama kepada seluruh subjek, sementara pertanyaan lanjutan (*probe*) disesuaikan dengan respons subjek untuk menelusuri lebih jauh kecenderungan *representasi embodied, symbolic-proceptual*, atau *formal-axiomatic* yang muncul secara natural dalam penjelasan mereka. Pendekatan ini memastikan konsistensi instrumen sekaligus memungkinkan fleksibilitas eksplorasi yang menjadi ciri utama wawancara kualitatif. Seluruh proses wawancara direkam dan ditranskripsi untuk dianalisis lebih lanjut.

Data dianalisis menggunakan model interaktif Miles, Huberman, dan Saldaña (2014) yang meliputi tiga tahap: kondensasi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan. Pada tahap kondensasi, jawaban mahasiswa dan transkrip wawancara dikode berdasarkan indikator World dari Tall. Tahap penyajian data dilakukan dengan menyusun kutipan-kutipan kunci, tabel ringkasan skor, dan rekonstruksi strategi penyelesaian untuk memudahkan peneliti melihat pola. Pada

tahap terakhir, peneliti menafsirkan temuan untuk mengidentifikasi karakteristik pemahaman setiap subjek, kesalahan konseptual yang muncul, serta gap atau hambatan transisi antar dunia pemikiran, misalnya kesulitan berpindah dari *embodied* ke *symbolic* atau dari *symbolic* ke formal (Dawkins, 2015).

C. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Gambaran Umum Pemahaman Nilai Mutlak Mahasiswa

Hasil tes diagnostik yang diberikan kepada 15 mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh menunjukkan variasi pemahaman yang cukup lebar terkait konsep nilai mutlak. Setiap mahasiswa mengerjakan sembilan butir soal yang dirancang untuk mengukur tiga aspek pemahaman menurut kerangka *Three Worlds of Mathematics* dari Tall, yaitu representasi *embodied*, *symbolic-proceptual*, dan *formal-axiomatic*. Secara umum, mahasiswa lebih banyak menunjukkan kecenderungan pada representasi simbolik daripada representasi visual maupun formal. Hal ini terlihat dari pola jawaban pada beberapa soal yang menuntut pemahaman jarak, grafik, fungsi bersyarat, serta prosedur simbolik seperti penyelesaian dua bagian dari nilai mutlak. Distribusi kategori *world* mahasiswa berdasarkan skor dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Distribusi Dominasi Dunia Tall pada Mahasiswa

Kategori <i>World</i> dari Tall	Jumlah Mahasiswa	Persentase
<i>Embodied Dominant</i>	4 mahasiswa	26.7%
<i>Symbolic-Proceptual Dominant</i>	8 mahasiswa	53.3%
<i>Formal-Axiomatic Dominant</i>	3 mahasiswa	20.0%
Total	15 mahasiswa	100%

Berdasarkan tabel tersebut, terlihat bahwa kategori *symbolic-proceptual* merupakan kelompok terbesar. Sebagian besar mahasiswa dalam kelompok ini dapat menyelesaikan persamaan nilai mutlak melalui metode dua bentuk dengan cukup baik. Namun, banyak dari mereka tidak dapat menjelaskan alasan konseptual di balik prosedur tersebut. Sementara itu, empat mahasiswa berada pada kategori *embodied*. Mahasiswa pada kelompok ini mampu menggambarkan garis bilangan dan memaknai nilai mutlak sebagai jarak dua arah, namun sering mengalami kesulitan ketika representasi visual harus diterjemahkan ke dalam bentuk simbolik. Pada kategori *formal-axiomatic*, hanya tiga mahasiswa yang mencapai skor memadai untuk menunjukkan dominasi dunia ini. Mereka dapat menyatakan

definisi nilai mutlak sebagai fungsi bersyarat dan menghubungkannya dengan prosedur penyelesaian, tetapi belum sepenuhnya konsisten dalam mengaitkan representasi formal ini dengan representasi lain.

Proses identifikasi kategori *world* dari Tall dilakukan melalui penjumlahan skor masing-masing dunia dan penetapan ambang minimal enam poin untuk menentukan penguasaan pada suatu dunia. Analisis ini memberikan gambaran awal mengenai kecenderungan pemahaman mahasiswa dan menjadi dasar untuk memilih subjek analisis mendalam. Dari ketiga kelompok tersebut, masing-masing *world* kemudian diwakili oleh satu mahasiswa yang memenuhi syarat dominasi pada kategorinya serta bersedia mengikuti wawancara lebih lanjut. Kriteria penting dalam pemilihan subjek tidak hanya mencakup skor yang memenuhi ambang, tetapi juga kemampuan mahasiswa dalam memberikan penjelasan verbal selama wawancara.

Tiga subjek tersebut kemudian diberi kode M1, M2, dan M3. Subjek M1 mewakili mahasiswa dengan dominasi *embodied world*, yaitu mahasiswa yang memahami nilai mutlak terutama melalui visualisasi dan intuisi jarak pada garis bilangan. Subjek M2 mewakili *symbolic–proceptual world*, yakni mahasiswa yang mengandalkan prosedur aljabar dan metode dua bentuk tetapi belum sepenuhnya memahami alasan konseptual di balik langkah tersebut. Sementara itu, subjek M3 mewakili *formal–axiomatic world*, yaitu mahasiswa yang mampu menyatakan definisi formal nilai mutlak dan memberikan justifikasi matematis yang lebih terstruktur.

Ketiga subjek inilah yang kemudian dianalisis secara mendalam melalui kombinasi tes diagnostik dan wawancara untuk menjawab setiap rumusan masalah penelitian. Pemilihan subjek ini memungkinkan peneliti menelusuri karakteristik pemahaman konsep nilai mutlak pada masing-masing dunia Tall dan mengungkap bentuk miskonsepsi atau hambatan transisi antar *world* yang muncul pada mahasiswa.

Pemahaman Mahasiswa dalam *Embodied World*

Analisis terhadap subjek M1 sebagai representasi *embodied world* menunjukkan bahwa pemahaman nilai mutlaknya sangat bergantung pada visualisasi dan intuisi jarak pada garis bilangan. M1 memahami nilai mutlak

sebagai “jarak dari suatu titik,” dan pemahaman ini tampak konsisten ketika M1 diminta menyelesaikan soal $|x - 3| = 5$. Langkah pertama yang dilakukan M1 adalah menggambar garis bilangan, menandai titik 3 sebagai pusat, lalu menentukan dua titik yang berjarak lima satuan dari pusat tersebut. Visualisasi ini menghasilkan dua solusi: $x = -2$ dan $x = 8$. Dalam wawancara, M1 menyatakan: “*Kalau nilai mutlak itu jarak, jadi saya langsung cari titik yang jauh lima dari angka 3, satu ke kanan dan satu ke kiri.*” Kutipan ini menunjukkan bahwa representasi embodied menjadi dasar utama pemahamannya.

Namun, ketika representasi visual tersebut harus diubah ke bentuk simbolik, M1 tampak belum memiliki pemahaman yang kuat. Saat diminta mengonversi garis bilangan tadi menjadi bentuk persamaan, M1 menyebutkan bahwa dirinya “hanya mengikuti gambar,” tetapi belum memahami bagaimana mengubah jarak menjadi dua bentuk, yaitu bentuk positif dan bentuk negatif. Ketika peneliti bertanya bagaimana cara menuliskan solusi secara aljabar, M1 ragu: “*Saya tahu hasilnya dua titik itu, tapi kalau harus dibuat bentuk positif atau negatif saya suka bingung tandanya.*” Pernyataan ini menunjukkan adanya *disconnect* antara intuisi visual dan kemampuan simbolisasi, suatu gejala yang sering muncul pada mahasiswa yang dominan embodied menurut Tall (2013).

Kesulitan M1 semakin tampak ketika diberikan soal *symbolic* seperti $|2x - 4| = 6$. Secara visual M1 dapat menggambar garis bilangan dan menentukan jarak, namun ketika diminta menuliskan dua bentuknya, yaitu $2x - 4 = 6$ dan $2x - 4 = -6$, M1 beberapa kali keliru menentukan tanda. M1 menjelaskan: “*Kadang saya lupa apakah harus ditambah atau dikurang, makanya saya lebih yakin kalau lihat garisnya dulu.*” Hal ini menunjukkan bahwa M1 memahami makna jarak, tetapi belum memahami bahwa proses aljabar dua bentuk merupakan representasi simbolik dari jarak tersebut.

Selain itu, M1 belum mampu menghubungkan grafik fungsi nilai mutlak berbentuk V dengan konsep jarak. Ketika diminta menjelaskan mengapa grafik $|x|$ memiliki puncak di nol dan simetris, M1 menjawab: “*Karena memang bentuknya begitu, tapi saya tidak terlalu menghubungkannya dengan jarak.*” Ini menunjukkan bahwa pemahaman *embodied* M1 bersifat kuat pada representasi garis bilangan, tetapi belum terintegrasi dengan grafik sebagai bentuk visual lain.

Walaupun demikian, visualisasi berbasis garis bilangan tetap menjadi ciri dominan pemahaman M1, dan hasil wawancara mengonfirmasi bahwa *embodied World* merupakan dunia pemahaman yang paling stabil bagi subjek ini.

Pemahaman Mahasiswa dalam *Symbolic–Proceptual World*

Subjek M2 menunjukkan dominasi yang kuat pada *symbolic–proceptual world*, ditandai dengan kemampuannya menyelesaikan persamaan nilai mutlak melalui manipulasi simbol dan penyusunan dua bentuk secara mekanistik. Pada hampir seluruh soal yang memerlukan prosedur aljabar, M2 mengerjakan cepat dan sistematis. Ketika diberikan *soal* $|2x - 4| = 6$, M2 langsung menuliskan dua bentuk, yaitu bentuk positif $2x - 4 = 6$ dan bentuk negatif $2x - 4 = -6$, kemudian menyelesaiakannya menjadi $x = 5$ dan $x = -1$. Dalam wawancara, M2 menyatakan: “*Kalau soal nilai mutlak, saya selalu buat dua bentuk, satu positif dan satu negatif. Itu cara yang pasti benar.*” Kutipan ini menunjukkan bahwa pemahaman M2 bertumpu pada aturan prosedural yang telah dihafal dengan baik.

Walaupun demikian, hasil wawancara memperlihatkan bahwa M2 belum sepenuhnya memahami alasan matematis mengapa dua bentuk tersebut muncul dalam penyelesaian nilai mutlak. Ketika peneliti bertanya mengapa bentuk negatif perlu dipertimbangkan, M2 menjawab: “*Karena nilai mutlak itu bikin semuanya positif, jadi kita buat yang satunya negatif biar nanti jadi positif juga setelah dihitung.*” Pernyataan ini menunjukkan bahwa M2 memahami simbol secara operasional, tetapi belum menghubungkannya dengan konsep nilai mutlak sebagai jarak. Dengan kata lain, proses simbolik yang M2 lakukan lebih bersifat mekanistik daripada konseptual.

Keterbatasan pemahaman ini semakin tampak ketika M2 diminta menghubungkan langkah aljabar dengan representasi visual. Ketika ditunjukkan garis bilangan dan ditanya bagaimana dua bentuk tersebut mewakili dua titik pada jarak tertentu dari pusat, M2 menjawab: “*Saya tidak terlalu pakai garis bilangan. Langsung saja kerjakan bentuk positif dan negatif.*” Hal ini menunjukkan bahwa representasi *embodied* belum menjadi bagian dari struktur pengetahuan M2. M2 lebih mengandalkan transformasi simbolik tanpa memanfaatkan intuisi visual sebagai dasar pemaknaan.

Selain itu, M2 juga tidak dapat mengaitkan grafik nilai mutlak berbentuk V dengan langkah penyelesaian simbolik. Ketika ditanya bagaimana dua solusi dalam penyelesaian aljabar muncul dalam grafik, M2 berkata: “*Grafik itu hanya bentuk fungsinya. Untuk mencari solusi, tetap pakai dua bentuk tadi.*” Jawaban ini menegaskan bahwa symbolic–proceptual world yang dimiliki M2 tidak terintegrasi dengan representasi visual maupun formal. M2 berada pada posisi yang disebut Tall (2013) sebagai *symbolic dominance*, yaitu ketika operasi simbolik menjadi pusat pemahaman, tetapi makna dibalik simbol tidak sepenuhnya dipahami.

Secara keseluruhan, hasil analisis terhadap subjek M2 menunjukkan bahwa M2 sangat kuat dalam prosedur simbolik, terutama dalam menyusun dan menyelesaikan dua bentuk positif dan negatif pada nilai mutlak. Namun, kemampuan ini tidak diikuti oleh pemahaman konseptual yang mendalam. Representasi embodied maupun formal belum terhubung secara bermakna pada struktur pengetahuannya. Hal ini memperkuat karakterisasi *symbolic–proceptual world* sebagaimana digambarkan oleh Tall, yaitu dunia yang didominasi pemrosesan simbol tanpa landasan visual atau justifikasi aksiomatis yang kuat.

Pemahaman Mahasiswa dalam *Formal–Axiomatic World*

Subjek M3 sebagai representasi formal–axiomatic world menunjukkan kemampuan yang lebih matang dalam memahami nilai mutlak berdasarkan definisi formal dan struktur matematis yang melandasinya. Sejak awal wawancara, M3 secara konsisten merujuk pada definisi fungsi bersyarat sebagai dasar penyelesaian nilai mutlak. Ketika diminta menjelaskan konsep $|x|$, M3 menuliskan definisi formal dengan tepat:

$$|x| \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Setelah itu, M3 berkata: “*Nilai mutlak harus didefinisikan per kasus karena sifat tanda positif dan negatif itu berbeda, dan agar hasilnya selalu non-negatif.*” Pernyataan ini menunjukkan bahwa M3 tidak sekadar menghafal definisi, tetapi memahami alasan aksiomatis yang melandasinya.

Pemahaman formal M3 juga terlihat ketika M3 menyelesaikan soal seperti $|x - 3| = 7$. Alih-alih langsung menggunakan dua bentuk seperti M2, M3 terlebih

dahulu menganalisis struktur ekspresi tersebut dengan mengubahnya ke bentuk definisi formal:

$$|x| \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ 3 - x, & x < 3 \end{cases}$$

M3 kemudian menyelesaikan masing-masing bagian sesuai domainnya. Dalam wawancara, M3 menyatakan: “*Saya mulai dari definisinya supaya jelas domainnya. Kalau asal buat bentuk positif dan negatif tanpa melihat domain, takutnya nanti tidak konsisten.*” Kutipan ini menggambarkan pemahaman formal yang reflektif, konsisten dengan karakteristik dunia formal yang digambarkan oleh Tall (2004; 2013).

Namun, meskipun penguasaan formalnya kuat, integrasi antara representasi formal dan representasi visual belum sepenuhnya terbentuk. Saat diminta menghubungkan definisi formal dengan grafik berbentuk V, M3 dapat menjelaskan potongan grafik berdasarkan fungsi bersyarat, namun belum mampu menautkannya dengan interpretasi jarak. M3 mengatakan: “*Grafik itu dua garis lurus karena sesuai definisinya, satu untuk $x \geq 0$ dan satu untuk $x < 0$. Tapi kalau hubungannya dengan jarak, saya kurang terbiasa menjelaskan ke arah situ.*” Jawaban ini menunjukkan bahwa embodied world belum sepenuhnya mendukung pemahamannya.

Meski demikian, M3 mampu mengidentifikasi ketidakmungkinan solusi berdasarkan sifat formal nilai mutlak. Misalnya, ketika diberikan soal $|x - 3| = -4$, M3 langsung menolak kemungkinan adanya solusi dengan alasan formal: “*Karena nilai mutlak selalu bernilai nol atau lebih, maka tidak ada solusi untuk persamaan ini.*” Pernyataan ini menunjukkan bahwa M3 memahami sifat fundamental nilai mutlak sebagai bagian dari struktur matematis yang tidak dapat dilanggar.

Secara keseluruhan, hasil analisis rumusan masalah ketiga menunjukkan bahwa M3 memiliki pemahaman yang kuat dalam *formal–axiomatic world*. M3 dapat mengoperasikan definisi, mempertimbangkan domain, dan memberikan justifikasi matematis yang jelas. Namun, representasi formal tersebut belum sepenuhnya terintegrasi dengan representasi visual maupun simbolik, menunjukkan bahwa transisi antardunia masih bersifat satu arah: kuat dari formal ke symbolic, tetapi belum mapan dari formal ke embodied. Temuan ini sesuai dengan deskripsi

Tall mengenai mahasiswa yang berada pada tahap *formal dominance*, yaitu ketika justifikasi matematika diutamakan, tetapi landasan visualnya kurang berkembang.

Pembahasan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa pemahaman mahasiswa mengenai nilai mutlak tidak berkembang secara linear, melainkan mengikuti pola yang sejalan dengan struktur tiga dunia pemikiran matematis yang dikemukakan Tall (2004; 2013). Subjek M1 sebagai representasi embodied world memperlihatkan bahwa intuisi visual dapat menjadi titik awal yang kuat untuk memahami nilai mutlak sebagai jarak. Namun intuisi tersebut tidak otomatis berkembang menjadi kemampuan simbolik yang stabil. Temuan ini selaras dengan penelitian Kurudirek et al. (2025), yang menunjukkan bahwa mahasiswa sering mampu menggambar grafik atau garis bilangan namun kesulitan menjelaskan makna matematis di balik visual tersebut. Elia et al. (2016) juga menegaskan bahwa kesenjangan antara representasi visual dan simbolik merupakan salah satu hambatan konseptual paling umum dalam nilai mutlak. Bahkan dalam tinjauan sistematis global, Papadouris et al. (2025) menyebutkan bahwa transisi *embodied* ke *symbolic* adalah titik lemah yang konsisten muncul pada berbagai konteks pendidikan. Dengan demikian, representasi embodied M1 masih bersifat lokal dan belum membentuk jembatan konseptual menuju dunia simbolik.

Subjek M2 sebagai representasi *symbolic–proceptual world* menunjukkan kecenderungan kuat mengandalkan prosedur aljabar dalam menyelesaikan nilai mutlak. Kemampuan menyusun dua bentuk positif dan negatif dilakukan dengan cepat, namun tanpa pemahaman konseptual yang mendasarinya. Kondisi ini sesuai dengan karakter symbolic world dalam teori Tall, di mana procept cenderung diperlakukan sebagai prosedur mekanis (Tall, 2006). Hambatan ini diperkuat oleh temuan Mathaba et al. (2024), yang menunjukkan bahwa mahasiswa sering memahami ekspresi simbolik secara operasional tanpa mengaitkannya dengan makna. Almog dan Ilany (2012) melaporkan pola yang sama: siswa mengaplikasikan dua bentuk nilai mutlak tanpa memahami konsep jarak. Penelitian Altarawneh dan Alkhateeb (2024) juga menegaskan bahwa dominasi strategi simbolik sering menutupi kurangnya pemahaman konseptual. Bahkan calon guru pun, sebagaimana ditunjukkan Aziz et al. (2019), masih menunjukkan

kecenderungan prosedural yang kuat. Dengan demikian, performa simbolik M2 yang tampak “mahir” sesungguhnya merepresentasikan procedural fluency, bukan conceptual understanding.

Subjek M3 menunjukkan penguasaan *formal-axiomatic world* melalui penggunaan definisi fungsi bersyarat dan kemampuan memberikan justifikasi matematis yang tepat. Namun, keterbatasannya dalam menghubungkan definisi formal dengan representasi visual menunjukkan bahwa perkembangan menuju dunia formal tidak selalu dibangun secara terintegrasi dari dunia embodied. Dawkins (2015) menegaskan bahwa banyak mahasiswa memasuki dunia formal melalui jalur simbolik, bukan dari penguatan visual, sehingga representasi formal berdiri sendiri tanpa makna geometris. Hal ini sejalan dengan temuan Sierpińska et al. (2011), yang menunjukkan bahwa pembelajar tingkat lanjut mampu memahami definisi formal tetapi gagal menghubungkannya dengan grafik nilai mutlak. Nisa et al. (2019) juga menemukan bahwa mahasiswa dapat menyatakan definisi dengan benar namun tidak dapat mengaitkan definisi tersebut dengan bentuk-bentuk representasi lainnya. Papadouris et al. (2025) menambahkan bahwa ketidaksinambungan antara alasan formal dan makna visual merupakan sumber miskONSEPsi yang persisten. Kondisi ini menyebabkan pemahaman formal M3 menjadi rigid dan kurang fleksibel ketika harus diaplikasikan dalam konteks representasi lain.

Jika dibandingkan, ketiga subjek menunjukkan jalur perkembangan pemahaman yang berbeda, tetapi semua mengungkap fenomena umum dalam pembelajaran matematika yakni terjadi pemutusan koneksi antarworld. M1 kuat *embodied* tetapi lemah *symbolic*; M2 kuat *symbolic* tetapi lemah *embodied* dan *formal*; M3 kuat *formal* tetapi lemah *embodied*. Ketiga kasus ini menggambarkan bahwa pemahaman nilai mutlak mahasiswa tidak bersifat holistik. Tall menjelaskan bahwa perpindahan dari *embodied* ke *symbolic* menuntut proses *compression* dan *linking*, yaitu kemampuan mengompresi ide visual menjadi struktur simbolik. Namun pada M1, proses ini belum terjadi. Demikian pula, *transisi symbolic ke formal* menuntut *formalisasi makna*, namun M2 belum memiliki makna konseptual yang cukup untuk membangun definisi formal. Sebaliknya, M3 sudah menguasai

definisi formal tetapi tidak melakukan *grounding* kembali ke representasi *embodied*.

Hal menarik dalam penelitian ini adalah bahwa *symbolic world* menjadi dunia dominan bagi sebagian besar mahasiswa, sebagaimana terlihat dalam distribusi data awal. Kondisi ini menegaskan kecenderungan kurikulum yang menekankan prosedur pemecahan masalah aljabar tanpa membangun landasan visual maupun definisi formal yang kuat. Hal ini selaras dengan laporan berbagai penelitian miskonsepsi nilai mutlak yang menyatakan bahwa mahasiswa mampu menyelesaikan soal standar tetapi gagal memahami makna nilai mutlak sebagai jarak atau sebagai fungsi bersyarat (Syahda & Pujiastuti, 2020; Cahyaningtyas et al., 2021). Dengan kata lain, *symbolic dominance* yang muncul pada M2 bukanlah pengecualian, melainkan pola umum.

Temuan ini juga menunjukkan bahwa pemahaman nilai mutlak membutuhkan integrasi representasi yang tidak hanya bersifat vertikal (*embodied ke symbolic ke formal*), tetapi juga horizontal, yaitu kemampuan berpindah dari satu representasi ke representasi lain secara fleksibel. Ketidakmampuan M1 untuk mentransformasikan visualisasi ke simbol, ketidakmampuan M2 menghubungkan simbol ke makna jarak, dan ketidakmampuan M3 menghubungkan definisi formal ke grafik menunjukkan bahwa integrasi ini belum terjadi. Literatur tentang multiple representations dalam pendidikan matematika menegaskan bahwa kemampuan ini merupakan indikator penting dari pemahaman konseptual tingkat tinggi.

Dari perspektif pembelajaran, temuan ini menegaskan perlunya desain pembelajaran yang memfasilitasi perpindahan antar dunia matematis secara eksplisit. Misalnya, pembelajaran nilai mutlak seharusnya tidak langsung berfokus pada penyelesaian bentuk positif dan negatif, tetapi dimulai dengan eksplorasi visual jarak dan simetri, kemudian membangun prosedur aljabar berbasis makna, dan akhirnya menghubungkannya dengan definisi formal. Proses ini sejalan dengan pendekatan *concreteness fading* maupun *progressive formalization* dalam teori pendidikan matematika. Dengan demikian, penelitian ini memberikan implikasi bahwa pembelajaran nilai mutlak harus menyeimbangkan representasi *embodied*, *symbolic*, dan *formal* secara sistematis.

Secara keseluruhan, pembahasan ini menunjukkan bahwa masing-masing *world* yaitu *embodied*, *symbolic*, dan *formal*, yaitu membawa kekuatan dan tantangannya sendiri. Namun pemahaman yang mendalam hanya dapat terjadi jika ketiganya terhubung melalui jembatan konseptual yang kokoh. Penelitian ini mengonfirmasi bahwa mahasiswa sering terjebak dalam satu dunia tertentu tanpa mampu melakukan transisi yang diperlukan, dan inilah akar utama dari berbagai miskONSEPSI nilai mutlak yang muncul dalam data.

D. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan diatas, kesimpulan yang diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Distribusi pemahaman mahasiswa berdasarkan *Three Worlds of Mathematics* menunjukkan bahwa *symbolic–proceptual world* merupakan dunia yang paling dominan. Sebanyak 53.3% mahasiswa berada pada dunia simbolik, 26.7% pada *embodied world*, dan hanya 20% pada *formal–axiomatic world*. Hal ini menegaskan bahwa mayoritas mahasiswa lebih menguasai prosedur aljabar nilai mutlak dibandingkan pemahaman visual maupun definisi formalnya.
2. Mahasiswa *embodied world* memahami nilai mutlak sebagai jarak, tetapi kesulitan mentransformasikan intuisi visual ke representasi simbolik. Mahasiswa mampu menggambar garis bilangan dan menentukan dua solusi berdasarkan jarak, tetapi belum mampu menuliskannya secara simbolik dalam bentuk positif dan negatif secara tepat. Koneksi *embodied* ke *symbolic* belum terbentuk secara kuat.
3. Mahasiswa *symbolic–proceptual world* menguasai prosedur penyelesaian dua bentuk positif dan negatif, tetapi pemahamannya bersifat mekanistik. Mahasiswa menyelesaikan soal nilai mutlak dengan cepat dan tepat, namun tidak memahami alasan matematis di balik langkah tersebut. Representasi simbolik tidak terhubung dengan makna visual ataupun definisi formal nilai mutlak.
4. Mahasiswa *formal–axiomatic world* memahami definisi formal nilai mutlak, tetapi belum mampu menghubungkannya dengan representasi visual. Mahasiswa dapat menjelaskan fungsi bersyarat dan memberikan justifikasi

matematis yang tepat, namun kesulitan menjelaskan grafik nilai mutlak sebagai representasi jarak. Integrasi *formal* ke *embodied* belum terjadi secara utuh.

DAFTAR PUSTAKA

- Almog, N., & Ilany, B. S. (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 347–364. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9418-9>
- Altarawneh, A. F., & Alkhateeb, M. A. (2024). Common misconceptions about absolute value and related thinking strategies. *Journal of Curriculum Studies Research*, 6(1), 1–17. <https://doi.org/10.46303/jcsr.2024.19>
- Anam, K., Hidayati, W. S., & Rozak, A. (2022). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal nilai mutlak bilangan kompleks. *Prosiding Conference on Mathematics Education*, 3(1), 45–52.
- Aziz, T. A., Supiat, & Soenarto, Y. (2019). Pre-service secondary mathematics teachers' understanding of absolute value. *Cakrawala Pendidikan*, 38(1), 112–124. <https://doi.org/10.21831/cp.v38i1.21945>
- Cahyaningtyas, O., & Rahardi, R. (2021). Analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak berdasarkan teori Newman. *Edumatica: Jurnal Pendidikan Matematika*, 11(2), 145–156.
- Dawkins, P. (2015). Students' understanding of the formal definition of limit: Three teaching experiments. *Journal of Mathematical Behavior*, 40, 21–37. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.03.002>
- Elia, I., Özal, S., Gagatsis, A., & Özal, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: Focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 837–850. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0787-8>
- Irsyadi, M. K., Sari, A. S. L., & Yunaini, F. (2022). Analisis kesalahan siswa dalam penyelesaian soal persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak berdasarkan kriteria Watson. *Numeracy: Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1), 12–25.
- Kurudirek, A., Arslan, A., & Tuncer, B. (2025). Math misconceptions: Mistakes, misunderstanding, and confusion. *Educenter: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 8(1), 12–27.
- Marzano, R. J. (2001). *Classroom instruction that works: Research-based strategies for increasing student achievement*. ASCD.

- Mathaba, P. N., Mhlongo, S., & Sibaya, T. (2024). Error analysis in algebra learning: Exploring misconceptions and cognitive levels. *Journal on Mathematics Education*, 15(1), 33–48.
- Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (3rd ed.). SAGE Publications.
- Nisa, Z., Lukito, A., & Masriyah. (2019). Students' mathematical discourse analysis by commognition theory in solving absolute value equations. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157, 032108. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/3/032108>
- Nitko, A. J., & Brookhart, S. M. (2011). *Educational assessment of students* (6th ed.). Pearson.
- Oikkonen, J., & Hannula, M. S. (2022). Students' mathematical thinking and the development of symbolic and formal understanding: Revisiting Tall's three worlds of mathematics. *International Journal of Mathematical Education*, 54(3), 367–383.
- Papadouris, J. P., Komis, V., & Lavidas, K. (2025). Errors and misconceptions of secondary school students in absolute values: A systematic literature review. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.1007/s13394-024-00499-9>
- Sierpińska, A., Bobos, G., & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), 41–62. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9314-9>
- Syahda, U., & Pujiastuti, H. (2020). Analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak berdasarkan teori Polya. *JKPM (Jurnal Kajian Pendidikan Matematika)*, 5(1), 1–10.
- Tall, D. O. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 28–33.
- Tall, D. O. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 195–215.
- Tall, D. O. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.
- Vhantoria, F. (2022). Analisis kesalahan mahasiswa menyelesaikan soal ketaksamaan yang melibatkan nilai mutlak berdasarkan teori Kastolan. *Eksponen: Jurnal Pendidikan Matematika*, 4(2), 55–64.